

ACTA
SOCIETATIS SCIENTIARUM
FENNICÆ.

TOMUS XV.



HELSINGFORSIÆ.
Ex officina typographica Societatis litterariae fennicae.
MDCCLXXXVIII.

UEBER EIN
DIE FLÄCHEN KLEINSTEN FLÄCHENINHALTS

BETREFFENDES
PROBLEM DER VARIATIONSRECHNUNG.

FESTSCHRIFT
ZUM JUBELGEBURTSTAGE DES HERRN

KARL WEIERSTRASS.

VON

H. A. SCHWARZ.

Zum 31^{sten} October 1885.

Hochverehrter Herr Professor!

Um Ihnen zu dem Tage, an welchem Sie auf siebenzig Lebensjahre zurückblicken, durch eine wissenschaftliche Arbeit eine Freude zu bereiten, habe ich die Beschäftigung mit einer Frage wieder aufgenommen, deren Bearbeitung Sie vor zwanzig Jahren einigen Ihrer Zuhörer empfohlen haben.

Das Ergebniss, zu welchem ich durch Anwendung von Schlussweisen, die von Ihnen ausgebildet worden sind, gelangt bin, enthalten die folgenden Blätter; ich bitte Sie, dieselben als ein Zeichen dankbarer Gesinnung freundlich aufnehmen zu wollen.

Verehrungsvoll

H. A. Schwarz.

ERSTER THEIL.

Ueber Minimalflächenstücke,
welche bei unverändert gelassener Begrenzungslinie
ein Minimum des Flächeninhalts besitzen.

1.

Zwei unendlich benachbarte Minimalflächenstücke.

Eine Minimalfläche ist eine analytische Fläche, welche die Eigenschaft besitzt, dass in jedem Punkte derselben die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche gleich gross und entgegengesetzt gerichtet sind.

Es sei M ein ganz im Endlichen liegendes, von einer endlichen Anzahl von Stücken analytischer Linien begrenztes, einfach zusammenhängendes, in seinem Innern keinen singulären Punkt enthaltendes Stück einer Minimalfläche. Der Flächeninhalt dieses Flächenstückes werde mit S , seine Begrenzungslinie mit L , die Länge eines Elementes dieser Begrenzungslinie mit dL bezeichnet.

Es sei M' ein dem Minimalflächenstücke M in der ganzen Ausdehnung desselben unendlich benachbartes Minimalflächenstück, bezüglich dessen analoge Voraussetzungen erfüllt sind, wie für das Flächenstück M . Es wird vorausgesetzt, dass die beiden Flächenstücke M und M' keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

Der Flächeninhalt des Flächenstückes M' werde mit S' , die Begrenzungslinie desselben mit L' bezeichnet.

Durch die beiden unendlich benachbarten Begrenzungslinien L und L' sei eine krumme Fläche F gelegt, so dass die Curven L und L' die vollständige Begrenzung eines auf dieser Fläche liegenden gürtelförmigen Flächenstreifens, eines Gürtels von unendlich schmaler Breite bilden. Diese Fläche F werde als gegeben angesehen. Der betrachtete Gürtel werde mit G bezeichnet.

Es bezeichne dp den auf der Fläche F gemessenen unendlich kleinen

geodätischen Abstand des Curvenclementes dL von der Curve L' ; oder die Breite des Gürtels G an der betrachteten Stelle. Das Product $dp \cdot dL$ bedeutet die Grösse des Flächeninhalts eines Rechtecks mit den Seiten dp und dL , d. h. die Grösse des Flächeninhalts eines Elementes des Gürtels G , welche mit dF bezeichnet werden soll.

Es besteht also die Gleichung

$$(1.) \quad dF = dp \cdot dL.$$

Längs jedes Elementes dL der Curve L grenzt je ein Element des Gürtels G an je ein Element des Flächenstückes M . Der von den Ebenen dieser beiden Flächenelemente gebildete Flächenwinkel, dessen Grösse allgemein zu reden mit der Lage des Elementes dL längs der Curve L sich ändert, werde mit ω bezeichnet.

Den gestellten Voraussetzungen zufolge kann das Flächenstück M' als eine Variation des Flächenstückes M angesehen werden, bei welcher für jedes Element dL der Randlinie die Grösse der Verschiebung auf der Fläche F in einer zur Richtung dieses Elementes senkrechten Richtung dp beträgt.

Nach einer von GAUSS aufgestellten Formel (Werke Band V, Seite 65) ergibt sich für die Differenz der Flächeninhalte der beiden Flächenstücke M und M' die Formel

$$(2.) \quad S' - S = - \int \cos\omega \cdot dp \cdot dL = - \int \cos\omega \cdot dF,$$

wobei die Integration längs aller Theile der Begrenzungslinie des Flächenstückes M , oder, was dasselbe bedeutet, über alle den Gürtel G bildenden Elemente der Fläche F zu erstrecken ist.

2.

Betrachtung einer Schaar von Minimalflächenstücken. Herleitung des Fundamentalsatzes.

Es sei gegeben eine von einem Parameter abhängende, einfach unendliche Schaar von Minimalflächenstücken

$$M, M', M'', \dots M^*,$$

welche so beschaffen sind, dass keine zwei zu verschiedenen Werthen des Parameters gehörenden Flächenstücke dieser Schaar einen gemeinsamen Punkt besitzen, und dass für je zwei unendlich benachbarte Flächenstücke dieser Schaar die in dem vorhergehenden Art. angegebenen auf die Flächenstücke M und M' sich beziehenden Voraussetzungen erfüllt sind.

[Der einfachste Fall einer solchen Schaar von Minimalflächenstücken wird offenbar dann erhalten, wenn man voraussetzt, dass alle der Schaar angehörenden Flächenstücke eben, und dass die Ebenen, denen dieselben angehören, einander parallel sind.]

Es bezeichne F zugleich den Flächeninhalt der von den Curven

$$L, L', L'', \dots L^*,$$

den Begrenzungslinien der Flächenstücke

$$M, M', M'', \dots M^*,$$

gebildeten Fläche F . Es wird vorausgesetzt, dass diese Fläche von einer endlichen Anzahl von Stücken analytischer Flächen gebildet werde.

Die Bedeutung des im Art. 1 erklärten Winkels ω und des Flächenelementes dF möge in der Weise ausgedehnt werden, dass die Formel (2.) des Art. 1 für je zwei unendlich benachbarte Minimalflächenstücke der betrachteten Schaar Geltung erhält.

Den gestellten Voraussetzungen zufolge besitzt die Grösse ω innerhalb jedes einzelnen der vorher erwähnten Stücke analytischer Flächen, aus denen die Fläche F besteht, für jeden Punkt nur einen Werth, welcher sich innerhalb dieses Flächenstückes mit der Lage des Flächenelementes dF nicht anders als stetig ändern kann.

Aus der Formel (2.) des Art. 1 ergibt sich durch Anwendung derselben auf je zwei unendlich benachbarte Flächenstücke der betrachteten Schaar und durch Integration in Bezug auf den Parameter der Schaar, wenn S^* die Grösse des Flächeninhalts des Minimalflächenstückes M^* bezeichnet, die Gleichung

$$(3.) \quad S^* - S = - \iint \cos \omega \cdot dF.$$

Bei dem auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Doppelintegrale ist die Integration über alle der Fläche F angehörende Elemente dF zu erstrecken.

Wird nun die specielle Annahme gemacht, dass die Curve L^* sich auf einen Punkt reducirt, wobei S^* in 0 übergeht, während die Fläche F eine schalenförmige Gestalt erhält, so geht die Gleichung (3.) über in

$$(4.) \quad S = \iint \cos \omega \cdot dF,$$

aus welcher sich in Folge der Gleichung $F = \iint dF$ die Formel

$$(5.) \quad F - S = \iint (1 - \cos\omega) dF$$

ergibt, welche für die folgende Untersuchung von wesentlicher Bedeutung ist.

3.

Einführung einer neuen Bedingung. Erweiterung des Geltungsbereiches des Fundamentalsatzes.

Einer im vorhergehenden Art. gestellten Voraussetzung zufolge sollen keine zwei Minimalflächenstücke der betrachteten Schaar, welche zu verschiedenen Werthen des Parameters gehören, einen gemeinsamen Punkt besitzen. Aus diesem Grunde bilden je zwei unendlich benachbarte Minimalflächenstücke der betrachteten Schaar und der die Begrenzungslinien derselben verbindende gürtelförmige Streifen der Fläche F zusammengenommen die vollständige Begrenzung eines einfach zusammenhängenden Theiles des Raumes, einer körperlichen Schale von überall unendlich kleiner Dicke.

Die Gesammtheit derjenigen Theile des Raumes, welche von allen auf die angegebene Weise durch die betrachtete Schaar von Minimalflächenstücken bestimmten körperlichen Schalen eingenommen werden, bildet einen einfach zusammenhängenden Theil des Raumes, welcher die Gesammtheit aller, den Minimalflächenstücken der betrachteten Schaar angehörenden Punkte enthält, und dessen vollständige Begrenzung von dem Minimalflächenstücke M und der Fläche F gebildet wird.

Dieser linsenförmig gestaltete Raumtheil möge mit R' bezeichnet werden.

Es wird nun die Festsetzung getroffen, die betrachtete Schaar von Minimalflächenstücken soll so beschaffen sein, dass der Abstand je zweier unendlich benachbarten Minimalflächenstücke der Schaar (die Dicke der vorher betrachteten körperlichen Schale) in der ganzen Ausdehnung dieser Flächenstücke einschliesslich des Randes derselben eine unendlich kleine Grösse derselben Ordnung ist.

In Folge dieser Festsetzung ist der Schluss gestattet, dass der in dem vorhergehenden Art. erklärte Winkel ω nicht für jeden Punkt der Fläche F den Werth Null haben kann, ohne dass diese Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung mit dem Minimalflächenstücke M zusammenfällt. Letzteres ist aber mit den gestellten Voraussetzungen nicht vereinbar.

Der Formel (5.) des vorhergehenden Art. zufolge besitzt daher die Fläche F , weil das Doppelintegral $\iint (1 - \cos\omega) dF$ einen von Null verschied-

denen positiven Werth hat, grösseren Flächeninhalt als das Minimalflächenstück M , mit welchem die Fläche F die Begrenzungslinie L gemein hat.

Wie eine einfache Ueberlegung ergibt, gilt dieselbe Schlussfolgerung für jede einfach zusammenhängende, von der Linie L begrenzte und aus einer endlichen Anzahl von Stücken analytischer Flächen bestehende Fläche F_1 , vorausgesetzt, dass alle Punkte dieser Fläche dem Raume R' angehören, und dass dieselbe nicht in ihrer ganzen Ausdehnung mit dem Minimalflächenstücke M zusammenfällt.

Die in den beiden vorhergehenden Artikeln angestellten Betrachtungen lassen sich nämlich bei angemessener Erweiterung der zu Grunde gelegten Voraussetzungen ohne Schwierigkeit so verallgemeinern, dass die zunächst für die Fläche F hergeleitete Schlussfolgerung für jede den angegebenen Bedingungen genügende Fläche F_1 Geltung erhält. Bei dieser Verallgemeinerung, auf welche hier nicht näher eingegangen zu werden braucht, kommt nicht allein der Fall in Betracht, in welchem die Fläche F_1 mit einem oder mehreren Minimalflächenstücken der Schaar Flächentheile von endlicher Ausdehnung gemeinsam hat, sondern auch der Fall, in welchem die Schnittlinien der Fläche F_1 mit einigen der Schaar angehörenden Minimalflächenstücken in getrennte Theile zerfallen. Für die auf die letztere Verallgemeinerung bezügliche Untersuchung ist das im Art. 1 betrachtete einfach zusammenhängende Minimalflächenstück M durch ein mehrfach zusammenhängendes Minimalflächenstück zu ersetzen, dessen Begrenzungslinie aus mehreren getrennten Theilen besteht; ebenso sind an die Stelle des einen im Art. 1 betrachteten gürtelförmigen Flächenstreifens mehrere solche Flächenstreifen zu setzen. Auf die nähere Ausführung dieser Verallgemeinerung, durch welche das Wesentliche der in den Artikeln 1 und 2 entwickelten Schlussfolgerungen nicht berührt wird, gehe ich hier nicht näher ein.

4.

Andere Begründung des Fundamentalsatzes.

Die im Art. 2 hergeleitete Formel (4.)

$$S = \iint \cos \omega \cdot dF$$

kann auch hergeleitet werden wie folgt.

Man denke sich die der betrachteten Schaar angehörenden Minimalflächenstücke in Flächenelemente zerlegt und betrachte eine durch die Begrenzung eines dieser Flächenelemente gelegte röhrenförmige Fläche,

welche die Minimalflächenstücke der betrachteten Schaar rechtwinklig durchschneidet. Diese Fläche begrenzt auf allen Flächenstücken der betrachteten Schaar, welche von derselben durchschnitten werden, Flächenelemente von gleich grossem Flächeninhalt, weil für jedes dieser Flächenstückchen die auf den Uebergang desselben in ein unendlich benachbartes von derselben röhrenförmigen Fläche begrenztes Flächenstückchen sich beziehende erste Variation des Flächeninhalts gleich Null ist.

Dieser Satz ist in dem Werke von E. LAMARLE, *Exposition géométrique du calcul différentiel et intégral (Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie de Belgique, in 8^{vo}, Tome XV, Bruxelles 1863, pag. 576)* meines Wissens zuerst ausgesprochen worden.

Bezeichnet dS den Flächeninhalt eines dieser Flächenelemente und dF den Flächeninhalt eines der Fläche F angehörenden, von der betrachteten röhrenförmigen Fläche begrenzten Flächenelementes, so besteht, jenachdem der im Vorhergehenden erklärte Winkel ω an der betrachteten Stelle kleiner oder grösser ist als ein Rechter, die erste oder die zweite der beiden Gleichungen

$$dS = \cos\omega \cdot dF, \quad dS = -\cos\omega \cdot dF.$$

Durch Integration ergibt sich hieraus, wenn die Integration über alle Flächenelemente dF erstreckt wird, aus welchen die Fläche F besteht, die Formel (4.) des Art. 2.

5.

Analytischer Beweis des Fundamentalsatzes.

Die vorstehenden Untersuchungen stützen sich grösstentheils auf geometrische Betrachtungen. Mit Hülfe des folgenden Systems von Formeln kann die Richtigkeit derselben Schlussfolgerungen auf analytischem Wege nachgewiesen werden.

Es mögen u, v, ε drei reelle stetig veränderliche Grössen,

x, y, z drei gegebene reelle analytische Functionen der Grössen u, v, ε bezeichnen, welche innerhalb des zu betrachtenden Gebietes Q der von einander unabhängigen Variablen u, v, ε den Charakter ganzer Functionen besitzen. Die Grössen x, y, z bedeuten die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes P ; für jeden dem betrachteten Gebiete Q angehörenden Werth von ε ist der geometrische Ort dieses Punktes P allgemein zu reden ein Stück einer krummen Fläche; für jedes dem betrachteten Gebiete Q angehörende Werthe-

paar u, v ist der geometrische Ort des Punktes P allgemein zu reden ein Stück einer krummen Linie.

Die Grössen $A, B, C, D, D', D'', E, F, G, H, I, K$ sollen durch folgende Gleichungen erklärt werden:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v}, & D &= A \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + B \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + C \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \\ B &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, & D' &= A \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + B \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + C \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}, \\ C &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}, & D'' &= A \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + B \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + C \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \\ E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, & H &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial \varepsilon}, \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, & I &= \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial \varepsilon}, \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, & K &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varepsilon}\right)^2. \end{aligned}$$

Für das Quadrat der Länge des Linienelementes einer von dem Punkte mit den Coordinaten x, y, z beschriebenen Linie ergibt sich der Ausdruck $dx^2 + dy^2 + dz^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 + 2H du d\varepsilon + 2I dv d\varepsilon + K d\varepsilon^2$.

Es wird vorausgesetzt, dass die beiden Grössen H und I beständig den Werth Null haben; mit anderen Worten, es wird vorausgesetzt, dass die einfach unendliche Schaar der Flächen $\varepsilon = \text{const.}$ von der zweifach unendlichen Schaar von Raumcurven $u = \text{const.}, v = \text{const.}$ orthogonal durchsetzt wird. Ferner wird vorausgesetzt, dass die Grössen $EG - F^2, K$ für kein dem zu betrachtenden Gebiete Q angehörendes System von Werthen u, v, ε den Werth Null annehmen.

Wird die Veränderlichkeit der Grössen u, v, ε auf solche Werthe beschränkt, welche eine gegebene analytische Gleichung

$$\varepsilon = f(u, v)$$

befriedigen, wobei vorausgesetzt werden soll, dass die Function $f(u, v)$ für alle in Betracht kommenden Werthe der Argumente u, v den Charakter einer ganzen Function besitzt, so ist der geometrische Ort des Punktes P allgemein zu reden eine gewisse krumme Fläche F, und zwar wird die Grösse des Flächeninhalts dF eines Elementes dieser Fläche gegeben durch die Formel

$$\begin{aligned} dF &= \sqrt{\left(E + K \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial u}\right)^2\right) \left(G + K \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial v}\right)^2\right) - \left(F + K \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v}\right)^2} \cdot du dv \\ &= \sqrt{EG - F^2 + K \left[E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial v}\right)^2 - 2F \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} + G \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial u}\right)^2\right]} \cdot du dv. \end{aligned}$$

Ohne dass die Allgemeinheit der Untersuchung beeinträchtigt wird, kann vorausgesetzt werden, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} \end{vmatrix} = A \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + B \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + C \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} = N$$

für alle dem zu betrachtenden Gebiete Q angehörenden Werthe der unabhängigen Variablen u, v, ε einen positiven Werth habe. In Folge der Gleichungen $H=0, I=0$ ergibt sich $N^2 = (EG - F^2) K$, also ist $N = \sqrt{EG - F^2} \cdot \sqrt{K}$, wobei jeder von diesen Quadratwurzeln ihr positiver Werth beizulegen ist.

Wird festgesetzt, dass die positiven Richtungen der Normalen der den Gleichungen $\varepsilon = \text{const.}$, $\varepsilon = f(u, v)$ entsprechenden Flächen diejenigen sind, in welchen der Parameter ε zunimmt, so haben die Cosinus der Neigungswinkel, welche die positive Richtung der Normale eines Elementes der Fläche $\varepsilon = \text{const.}$ mit den positiven Richtungen der Coordinatenachsen einschliesst, beziehlich die Werthe

$$\frac{1}{\sqrt{K}} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} = \frac{A}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} = \frac{B}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} = \frac{C}{\sqrt{EG - F^2}},$$

und es ergibt sich für den Cosinus des Winkels ω , welchen die positive Richtung der Normale der Fläche $\varepsilon = f(u, v)$ im Punkte P mit der positiven Richtung der Normale der durch den Punkt P hindurchgehenden Fläche $\varepsilon = \text{const.}$ einschliesst, die Gleichung

$$\begin{aligned} & \sqrt{EG - F^2 + K \left[E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} \right)^2 - 2F \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} + G \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial u} \right)^2 \right]} \cdot \sqrt{K} \cos \omega = \\ & = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} & \dots \\ \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} & \dots \\ \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} & \dots \end{vmatrix} = N = \sqrt{EG - F^2} \cdot \sqrt{K}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich also bei angemessener Zerlegung des Flächenstückes F in Flächenelemente die Formel

$$\sqrt{EG - F^2 + K \left[E \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} \right)^2 - 2F \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} + G \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial u} \right)^2 \right]} \cdot \cos \omega \, du \, dv = \cos \omega \, dF = \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv,$$

deren geometrische Bedeutung evident ist.

Der Winkel ω ist hierbei den getroffenen Festsetzungen zufolge stets ein spitzer Winkel.

Der Werth der Grösse $EG - F^2$ hängt im Allgemeinen nicht bloss von den Werthen der Grössen u, v , sondern auch von dem Werthe des Parameters ε ab. Wenn aber jedes der betrachteten Flächenstücke $\varepsilon = \text{const.}$ ein Minimalflächenstück ist, so ist, wie in dem Nachfolgenden gezeigt werden soll, der Werth der Grösse $EG - F^2$ von dem Werthe der Grösse ε unabhängig.

Der analytische Ausdruck der Bedingung, dass für jede der betrachteten Flächen $\varepsilon = \text{const.}$ die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche gleich gross und entgegengesetzt gerichtet sind, ist die Gleichung

$$ED'' - 2FD' + GD = 0.$$

In Folge der Gleichungen $H = 0, I = 0$ ergibt sich

$$D = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{K}} \left[\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \dots \right], \quad D' = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{K}} \left[\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \dots \right], \quad D'' = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{K}} \left[\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \dots \right],$$

es bestehen also die Gleichungen

$$D = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{K}} \left[\frac{\partial H}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial \varepsilon} \right], \quad D' = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{K}} \left[\frac{\partial H}{\partial v} + \frac{\partial I}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right], \quad D'' = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{K}} \left[\frac{\partial I}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} \right],$$

$$ED'' - 2FD' + GD = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{K}} \left[E \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} - 2F \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + G \frac{\partial E}{\partial \varepsilon} \right] = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{K}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (EG - F^2).$$

Hieraus folgt, dass $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (EG - F^2) = 0$, dass also die Grösse $EG - F^2$ und mithin auch der Ausdruck für die Grösse des Flächeninhalts dS eines Elementes der Fläche $\varepsilon = \text{const.}$,

$$dS = \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

von dem Werthe des Parameters ε unabhängig ist.

Die Richtigkeit der Gleichung

$$dS = \cos \omega \cdot dF$$

ist hierdurch analytisch dargethan.

Derjenige Theil des unbegrenzten Raumes, welcher die Gesamtheit aller den Minimalflächenstücken der betrachteten Schaar angehörenden Punkte und ausser diesen keine anderen Punkte enthält, möge mit R bezeichnet werden.

Bei der vorstehenden Herleitung ist die einschränkende Voraussetzung zu Grunde gelegt, die betrachtete Fläche F sei so beschaffen, dass, wenn der

Gleichung dieser Fläche die Form $\varepsilon = f(u, v)$ gegeben wird, der Parameter ε als Function der beiden unabhängigen Variablen u, v für alle in Betracht kommenden Werthe paare u, v den Charakter einer ganzen Function besitzt. Es bietet keine Schwierigkeit dar, die Geltung der Formel (4.) des Art. 2

$$S = \iint \cos \omega \cdot dF$$

von dieser einschränkenden Voraussetzung zu befreien, wenn bei angemessener Abänderung der Erklärung des Winkels ω an folgenden Bedingungen festgehalten wird:

1. Die vollständige Begrenzung der Fläche F und die vollständige Begrenzung des Minimalflächenstückes M wird gebildet von der aus einer endlichen Anzahl von Stücken analytischer Linien bestehenden Linie L .

2. Die Fläche F besteht aus einer endlichen Anzahl von zusammenhängenden Stücken analytischer Flächen, welche in ihrem Innern von singulären Stellen frei sind.

3. Die Fläche F und das Minimalflächenstück M bilden die vollständige Begrenzung eines oder mehrerer Theile des Raumes, welche sämmtlich Theile des Raumes R sind.

6.

Anwendung des Fundamentalsatzes.

Durch das in den vorhergehenden Artikeln erläuterte Beweisverfahren kann einer Forderung genügt werden, welche, wenn von dem Falle eines ebenen Flächenstückes abgesehen wird, meines Wissens bisher noch in keinem Falle ihre Erledigung gefunden hat.

Für ein (gewissen Bedingungen genügendes) Minimalflächenstück M soll der Nachweis geführt werden, dass dieses Flächenstück wirklich kleineren Flächeninhalt S besitzt, als jedes andere aus einer endlichen Anzahl von Stücken analytischer Flächen bestehende, von derselben Randlinie begrenzte, demselben unendlich benachbarte Flächenstück F .

Bezüglich dieser Forderung bemerke ich Folgendes:

Ein Minimalflächenstück, für welches der im Vorstehenden geforderte Nachweis gelingen soll, darf nicht ein ganz beliebiges sein; denn es gibt unendlich viele Minimalflächenstücke, für welche bei unverändert gelassener Begrenzungslinie die zweite Variation des Flächeninhalts einen negativen

Werth erhalten kann, wie ich in einer in den Monatsberichten der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1872 veröffentlichten Abhandlung: „Beitrag zur Untersuchung der zweiten Variation des Flächeninhalts von Minimalflächen im Allgemeinen und von Theilen der Schraubenfläche im Besonderen“ gezeigt habe.

Die Bedingung: „Die zweite Variation des Flächeninhalts eines solchen Flächenstückes soll bei unverändert gelassener Begrenzung desselben negative Werthe nicht annehmen können“ ist zweifellos eine nothwendige; aber es darf aus dem Umstande, dass diese Bedingung für ein bestimmtes Minimalflächenstück M erfüllt ist, nicht ohne Weiteres der Schluss gezogen werden, dass dieses Flächenstück wirklich kleineren Flächeninhalt besitzt, als jedes andere, von derselben Begrenzungslinie begrenzte, ihm unendlich benachbarte Flächenstück. Denn bei einem Probleme der Variationsrechnung ist überhaupt die Untersuchung der in Betracht kommenden zweiten Variation allein, wie Herr WEIERSTRASS nachgewiesen hat, im Allgemeinen nicht ausreichend, um mit Sicherheit auf das Eintreten eines Maximums oder Minimums schliessen zu können.

In dieser Hinsicht bedürfen einige in der erwähnten Abhandlung aus dem Jahre 1872 ausgesprochene Behauptungen einer noch eingehenderen Begründung.

In der That kann der geforderte Nachweis mittelst des in den vorhergehenden Artikeln dargelegten Beweisverfahrens für jedes Minimalflächenstück M geführt werden, für dessen beide Seiten eine das Flächenstück M enthaltende Schaar von Minimalflächenstücken construirt werden kann, welche so beschaffen ist, dass der Abstand je zweier unendlich benachbarter Flächenstücke der Schaar überall eine unendlich kleine Grösse derselben Ordnung ist.

Denn unter dieser Voraussetzung ist es möglich, auf der einen Seite des Minimalflächenstückes M einen Raum R' , auf der anderen Seite desselben einen Raum R'' abzugrenzen, so dass der aus den beiden Räumen R' und R'' bestehende Raum, welcher mit R bezeichnet werden soll, ausser der Gesamtheit derjenigen Punkte, welche den Minimalflächenstücken der beiden Schaaeren angehören, keine anderen Punkte enthält.

Es gilt dann der Satz: Jede nicht in ihrer ganzen Ausdehnung mit dem Minimalflächenstücke M zusammenfallende, aus einer endlichen Anzahl von Stücken analytischer Flächen bestehende, zusammenhängende Fläche F , deren vollständige Begrenzung von der Begrenzung des Minimalflächenstückes M gebildet wird, und welche so beschaffen ist, dass alle Punkte dieser Fläche dem Raume R angehören, besitzt grösseren Flächeninhalt, als das Minimalflächenstück M .

Ein Beweis für die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus der Formel (5.) des Art. 2

$$F - S = \iint (1 - \cos \omega) dF,$$

welche den in den vorhergehenden Artikeln enthaltenen Ausführungen zufolge für jede den angegebenen Bedingungen genügende Fläche F Geltung hat.

7.

Geometrische Deutung einiger eine Schaar von Minimalflächenstücken betreffender Formeln.

In der im vorhergehenden Art. angeführten Abhandlung habe ich gezeigt, dass die Frage, ob es möglich ist, zu einem Minimalflächenstücke M ein in der ganzen Ausdehnung desselben unendlich benachbartes Minimalflächenstück zu construiren, welches mit dem Minimalflächenstücke M keinen Punkt gemein hat, für alle Minimalflächenstücke, welche dasselbe sphärische Bild besitzen, in gleicher Weise zu beantworten ist.

Von den Bezeichnungen, welche ich in dieser Abhandlung angewendet habe, werde ich auch in dem Nachfolgenden Gebrauch machen.

Es bezeichnen die Grössen s, s_1 , die beiden complexen veränderlichen Grössen:

$$s = \xi + \eta i, \quad s_1 = \xi - \eta i,$$

als deren Functionen die Coordinaten eines beliebigen Punktes einer Minimalfläche betrachtet werden. Siehe die Abhandlung des Herrn WEIERSTRASS: Ueber die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist, Monatsberichte der Berliner Akademie vom Jahre 1866, Seite 618.

Es bezeichnen ξ, η die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in derjenigen Ebene, auf welche die Fläche der Hülfskugel mit dem Radius 1 durch stereographische Projection conform übertragen wird.

Es bezeichnet T dasjenige Stück dieser Ebene, welches dem zu betrachtenden Minimalflächenstücke M entspricht.

Wenn nun die lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{8\psi}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2} = 0$$

ein particuläres Integral besitzt, welches sich im Innern des Bereiches T regulär verhält, im Innern und längs des Randes dieses Bereiches nur reelle und zwar überall endliche, von Null verschiedene Werthe annimmt, so

lässt sich stets eine einfach unendliche Schaar von Minimalflächenstücken angeben, zu welcher das betrachtete Minimalflächenstück M gehört, und welche die Eigenschaft besitzt, dass der Abstand je zweier unendlich benachbarter der Schaar angehörender Minimalflächenstücke überall eine unendlich kleine Grösse derselben Ordnung ist.

Bezeichnen nämlich

x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes P des Minimalflächenstückes M ,

X, Y, Z die Cosinus der Winkel, welche die Normale des Flächenstückes M im Punkte P mit den positiven Richtungen der Coordinatenachsen einschliesst,

$x + \varepsilon \delta x, y + \varepsilon \delta y, z + \varepsilon \delta z$ die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes P' eines beliebigen Minimalflächenstückes M' der Schaar, wobei $\delta x, \delta y, \delta z$ von der Grösse ε , dem Parameter der Schaar, unabhängig sind,

so ergibt sich, wenn festgesetzt wird, dass die Normale des Flächenstückes M im Punkte P' der Normale des Flächenstückes M im Punkte P parallel sein soll, folgendes System von Gleichungen

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0, \quad Xd\delta x + Yd\delta y + Zd\delta z = 0, \quad X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 2\psi,$$

$$\delta x = 2X\psi + (1 - s^2) \frac{\partial \psi}{\partial s} + (1 - s_1^2) \frac{\partial \psi}{\partial s_1}, \quad Y\delta z - Z\delta y = i(1 - s^2) \frac{\partial \psi}{\partial s} - i(1 - s_1^2) \frac{\partial \psi}{\partial s_1},$$

$$\delta y = 2Y\psi + i(1 + s^2) \frac{\partial \psi}{\partial s} - i(1 + s_1^2) \frac{\partial \psi}{\partial s_1}, \quad Z\delta x - X\delta z = -(1 + s^2) \frac{\partial \psi}{\partial s} - (1 + s_1^2) \frac{\partial \psi}{\partial s_1},$$

$$\delta z = 2Z\psi + 2s \frac{\partial \psi}{\partial s} + 2s_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1}, \quad X\delta y - Y\delta x = 2is \frac{\partial \psi}{\partial s} - 2is_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1},$$

$$(\delta x - 2X\psi)^2 + (\delta y - 2Y\psi)^2 + (\delta z - 2Z\psi)^2 = 4(1 + ss_1)^2 \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial s_1} = (1 + \xi^2 + \eta^2)^2 \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)^2 \right],$$

$$\delta x \cdot dx + \delta y \cdot dy + \delta z \cdot dz = (1 + ss_1)^2 \left(\mathfrak{F}(s) \frac{\partial \psi}{\partial s} ds + \mathfrak{F}_1(s_1) \frac{\partial \psi}{\partial s_1} ds_1 \right),$$

$$\delta x \cdot dX + \delta y \cdot dY + \delta z \cdot dZ = 2 d\psi.$$

In diesen Gleichungen bezeichnet ψ das erwähnte particuläre Integral der angegebenen partiellen Differentialgleichung.

Die Bedeutung der Functionen $\mathfrak{F}(s), \mathfrak{F}_1(s_1)$ ist a. a. O. erklärt.

Aus dem vorstehenden Systeme von Gleichungen ergibt sich, dass die Richtung der Strecke mit den Coordinaten $\delta x, \delta y, \delta z$ einen rechten Winkel einschliesst mit der Richtung derjenigen im Punkte mit den Coordinaten X, Y, Z die Hilfskugel $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ berührenden Geraden, welche der Fortschreitung in der durch die Gleichung

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial s} ds + \frac{\partial\psi}{\partial s_1} ds_1 = 0$$

bestimmten Richtung entspricht.

Betrachtet man die Schaar der auf dieser Hülfskugel liegenden Curven, längs welcher die Function ψ einen constanten Werth besitzt, construirt zu dieser Schaar die Schaar der orthogonalen Trajectorien und bezeichnet mit dq die Länge eines Linienelementes der durch den Punkt mit den Coordinaten X, Y, Z gehenden, auf der Kugel $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ liegenden orthogonalen Trajectorie der Curvenschaar $\psi = \text{const.}$, so ergibt sich

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} ds = \frac{\partial\psi}{\partial s_1} ds_1, \quad dq^2 = \frac{4}{(1+ss_1)^2} ds ds_1, \quad (1 + \xi^2 + \eta^2)^2 \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial \eta} \right)^2 \right] = 4 \left(\frac{\partial\psi}{\partial q} \right)^2,$$

wenn mit $\frac{\partial\psi}{\partial q}$ die in der Richtung des betrachteten Curvenelementes genommene partielle Ableitung der Function ψ bezeichnet wird. Wird nun die Festsetzung getroffen, dass die Richtung, in welcher die Bogenlänge q zunimmt, diejenige sein soll, in welcher die Function ψ ebenfalls zunimmt, so stimmt diese Richtung mit der Richtung derjenigen Strecke überein, deren Coordinaten

$$\delta x - 2X\psi, \quad \delta y - 2Y\psi, \quad \delta z - 2Z\psi$$

sind, während die Grösse $2\frac{\partial\psi}{\partial q}$ die Länge dieser Strecke ergibt. Die Richtung dieser Strecke steht zu der Richtung desjenigen dem Flächenstücke M angehörenden Curvenelementes, welches im Punkte P der durch die Gleichung

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial s} ds + \frac{\partial\psi}{\partial s_1} ds_1 = 0$$

bestimmten Fortschreitungsrichtung entspricht, in der einfachen Beziehung, dass die Halbierungslinie des durch diese beiden Richtungen bestimmten Winkels der Tangente einer der beiden durch den Punkt P hindurchgehenden Asymptotenlinien des Minimalflächenstückes M parallel ist. Mit anderen Worten: Die beiden mit einander verglichenen Richtungen sind in Beziehung auf den zu dem Punkte P des Minimalflächenstückes M gehörenden DUPIN'schen Kegelschnitt zu einander conjugirt.

Der geometrische Ort desjenigen Punktes, dessen rechtwinklige Coordinaten beziehlich die Grösse

$$2X\psi, \quad 2Y\psi, \quad 2Z\psi$$

haben, ist die Fusspunktfläche einer Minimalfläche, welche letztere sich als geometrischer Ort eines Punktes erweist, dessen rechtwinklige Coordinaten beziehlich $\delta x, \delta y, \delta z$ sind; der Coordinatenanfangspunkt ist hierbei der Pol.

Da die Grösse ψ der Voraussetzung zufolge für kein dem Bereiche T angehörendes Werthepaar ξ, η gleich Null wird, so liegt der Coordinatenanfangspunkt in keiner der Tangentialebenen des dem Bereiche T entsprechenden Stückes dieser Minimalfläche, welches mit \mathfrak{M} bezeichnet werden möge.

Es ergibt sich hieraus folgender Lehrsatz.

Ein bestimmtes Stück M einer Minimalfläche besitzt unter allen von denselben Randlinien begrenzten und ihm unendlich benachbarten Flächenstücken den kleinsten Flächeninhalt, wenn es ein zusammenhängendes dem betrachteten Flächenstücke M durch parallele Normalen Punkt für Punkt entsprechendes Minimalflächenstück \mathfrak{M} gibt, dessen sämtliche Tangentialebenen von einem und demselben Punkte des Raumes einen von Null verschiedenen Abstand haben.*)

8.

Unterscheidung dreier Fälle. Tragweite der durch die Betrachtung derselben zu treffenden Entscheidung.

Durch das in den vorhergehenden Artikeln entwickelte Beweisverfahren ist die Frage über das Eintreten des Minimums des Flächeninhalts bei unverändert gelassener Begrenzungslinie für alle diejenigen Minimalflächenstücke M in positivem Sinne entschieden, deren sphärisches Bild einem Bereiche T entspricht, für dessen Inneres eines der particulären Integrale der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{8\psi}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2} = 0$$

sich regulär verhält und nur reelle, endliche, von Null verschiedene Werthe annimmt; die letztere Bedingung muss hierbei zunächst auch für alle Punkte der Begrenzung des Bereiches T gestellt werden.

Es entsteht nun die Frage nach dem diesem Entscheidungsgrunde beizulegenden Grade der Allgemeinheit.

In der im Art. 6 angeführten Abhandlung habe ich drei Fälle unterschieden, ohne den Beweis dafür anzutreten, dass durch dieselben die Gesamtheit aller Fälle erschöpft wird, welche in Bezug auf die Entscheidung der vorliegenden Frage eintreten können. Es sind dies folgende drei Fälle:

I. Es gibt ein particuläres Integral der angegebenen partiellen Differen-

*) Vergl. des Verfassers Abhandlung: Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, XIX. Jahrgang. Seite 270. Journal für Mathematik. Band 80, Seite 299.

tialgleichung, welches in Bezug auf den betrachteten Bereich allen aufgestellten Bedingungen genügt.

II. Es gibt ein particuläres Integral der angegebenen partiellen Differentialgleichung, welches zwar im Innern des betrachteten Bereiches den aufgestellten Bedingungen genügt, aber längs der ganzen Begrenzung desselben den Werth Null annimmt.

III. Es gibt ein particuläres Integral der angegebenen partiellen Differentialgleichung, welches so beschaffen ist, dass dieses Integral für einen Theil des betrachteten Bereiches den Bedingungen des vorhergehenden Falles (II.) genügt.

Tritt für ein gegebenes Minimalflächenstück M der erste Fall ein, so besitzt dasselbe, wie durch das in den vorhergehenden Artikeln entwickelte Beweisverfahren erhärtet wird, in dem angegebenen Sinne wirklich ein Minimum des Flächeninhalts.

Tritt für das betrachtete Minimalflächenstück M der dritte Fall ein, so gibt es unendlich viele, dem betrachteten Minimalflächenstücke unendlich benachbarte, von derselben Randlinie begrenzte Flächenstücke, welche kleineren Flächeninhalt haben als das Minimalflächenstück M . Es tritt also in diesem Falle für das betrachtete Minimalflächenstück ein Minimum des Flächeninhalts nicht ein.

Der zweite Fall ist für die vorliegende Untersuchung als Grenzfall anzusehen, dessen Eintreten eine besondere Untersuchung erfordert.

Der Nachweis, dass durch die angeführten drei Fälle die Gesamtheit aller Fälle erschöpft wird, welche in Bezug auf die Entscheidung der vorliegenden Frage eintreten können, scheint nicht ohne ein genaueres Eingehen auf einige Eigenschaften derjenigen reellen Functionen zweier Argumente geführt werden zu können, welche, wenn $p(\xi, \eta)$ eine gegebene Function dieser beiden Argumente bezeichnet, die in dem betrachteten Bereiche nur positive Werthe annimmt, einer partiellen Differentialgleichung von der Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + p(\xi, \eta) \cdot u = 0$$

genügen. Diese Untersuchung bildet den Gegenstand des zweiten Theiles der vorliegenden Abhandlung.

ZWEITER THEIL.

Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + p \cdot u = 0$$

unter vorgeschriebenen Bedingungen.

9.

Stellung der Aufgabe.

Es sei gegeben ein ebener, zweifach ausgedehnter, zusammenhängender, ganz im Endlichen enthaltener Bereich T , dessen vollständige Begrenzung von einer endlichen Anzahl von Stücken analytischer Linien gebildet wird.

Die den Bereich T geometrisch darstellende RIEMANN'sche Fläche, welche ebenfalls als gegeben betrachtet wird, kann einfach oder mehrfach zusammenhängend, einblättrig oder mehrblättrig sein; im letzteren Falle wird vorausgesetzt, dass dieselbe nur eine endliche Anzahl von Blättern und nur eine endliche Anzahl von Windungspunkten besitzt.

In der Ebene des Bereiches T denke man sich ein rechtwinkliges Coordinatensystem angenommen und bezeichne mit x, y , beziehungsweise mit ξ, η die auf dieses Coordinatensystem bezogenen rechtwinkligen Coordinaten einer beliebigen Stelle (x, y) , beziehungsweise (ξ, η) des Bereiches T .

Es bezeichne $p = p(x, y)$ eine gegebene, für jede Stelle (x, y) des Bereiches T eindeutig erklärte, stetige Function der Grössen x, y .

Unter der Voraussetzung, dass diese Function nur positive Werthe annimmt, welche den Werth P an keiner Stelle übersteigen, handelt es sich darum, zu untersuchen, ob es möglich ist, die partielle Differentialgleichung

$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + p \cdot w = 0$, oder, wenn der Ausdruck $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ zur Abkürzung mit Δw bezeichnet wird, die partielle Differentialgleichung $\Delta w + p \cdot w = 0$ für den Bereich T gewissen vorgeschriebenen Bedingungen gemäss zu integrieren.

Hierbei wird gefordert, die Function w soll für alle dem Innern und der Begrenzung des Bereiches T angehörenden Stellen stetig bleiben, eindeutig

erklärt sein und nur reelle Werthe annehmen; die partiellen Ableitungen der Function w , $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ sollen im Innern des Bereiches T nicht längs einer Linie unstetig sein.

Die Hauptfrage, auf deren Beantwortung es ankommt, ist die folgende: Gibt es eine für den betrachteten Bereich T allen angegebenen Bedingungen genügende Function w , welche im Innern und längs der ganzen Begrenzung dieses Bereiches nur positive, von Null verschiedene Werthe annimmt?

10.

Einige als bekannt vorauszusetzende Hilfssätze.

In Folge der bezüglich des Bereiches T gestellten Voraussetzungen ist es möglich, wie ich in einer in den Monatsberichten der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1870 veröffentlichten Abhandlung *) bewiesen habe, die partielle Differentialgleichung $\Delta w = 0$ für den Bereich T gewissen vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen gemäss zu integrieren.

Insbesondere ergibt sich aus einem in dieser Abhandlung **) geführten Beweise, dass es, wenn mit (x, y) , (ξ, η) irgend zwei von einander verschiedene Stellen des Bereiches T bezeichnet werden, stets eine Function $G = G(x, y; \xi, \eta)$ der vier Argumente x, y, ξ, η gibt, welche folgende Eigenschaften besitzt:

1. Als Function der beiden Argumente x, y betrachtet genügt die Function $G(x, y; \xi, \eta)$ der partiellen Differentialgleichung $\Delta G = 0$.

2. Bei der Annäherung der Stelle (x, y) an die Stelle (ξ, η) wird die Function $G(x, y; \xi, \eta)$ in derselben Weise logarithmisch unstetig, wie die Function $-\frac{1}{2(m+1)} \log [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]$. Die Grösse m bezeichnet hierbei eine bestimmte ganze Zahl, welcher, wenn die Stelle (ξ, η) nicht mit einem Windungspunkte des Bereiches T zusammenfällt, der Werth 0, andernfalls, wenn μ die Ordnungszahl dieses Windungspunktes bezeichnet, der Werth μ beizulegen ist.

3. Längs der ganzen Begrenzung des Bereiches T wird die Function $G(x, y; \xi, \eta)$ gleich Null.

*) Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen. Seite 767—795.

**) Seite 786 ff.

In Folge dieser Eigenschaften besitzt die Function $G(x, y; \xi, \eta)$ zugleich die Eigenschaft, für alle dem Innern des Bereiches T angehörenden Stellen (x, y) nur positive Werthe anzunehmen und ihren Werth nicht zu ändern, wenn die beiden Stellen (x, y) und (ξ, η) mit einander vertauscht werden.

Wird nun mit $f(\xi, \eta)$ eine für alle Stellen (ξ, η) des Bereiches T eindeutig erklärte, stetige Function der beiden Argumente (ξ, η) bezeichnet, so ergibt die Formel

$$(6.) \quad w = w(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_T f(\xi, \eta) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta,$$

wenn die Integration über den Bereich T erstreckt wird, ein particuläres Integral der partiellen Differentialgleichung

$$(7.) \quad \Delta w + f(x, y) = 0,$$

welches für alle dem Innern und der Begrenzung des Bereiches T angehörenden Stellen eindeutig erklärt ist, stetig bleibt und längs der ganzen Begrenzung dieses Bereiches gleich Null wird. Die Ableitungen $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ sind im Innern des Bereiches T nicht längs einer Linie unstetig.

Durch die angegebenen Eigenschaften ist dieses particuläre Integral der partiellen Differentialgleichung $\Delta w + f(x, y) = 0$ eindeutig bestimmt.

Auf die Beweise dieser Sätze, welche ich für die folgende Untersuchung als bekannt voraussetze, gehe ich hier nicht näher ein.

11.

Voraussetzung der Existenz einer für den Bereich T den gestellten Bedingungen genügenden Function w , welche für keine Stelle dieses Bereiches den Werth Null annimmt. Folgerungen.

Wenn vorausgesetzt wird, dass für den Bereich T eine Function w existirt, welche für diesen Bereich im angegebenen Sinne die partielle Differentialgleichung $\Delta w + p \cdot w = 0$ befriedigt, und welche sowohl im Innern, als auch längs der ganzen Begrenzung des Bereiches T nur positive, von Null verschiedene Werthe annimmt, so kann geschlossen werden wie folgt.

Es bezeichne $w_0 = w_0(x, y)$ eine für den Bereich T der Differentialgleichung $\Delta w_0 = 0$ genügende Function, welche längs der ganzen Begrenzung dieses Bereiches mit der Function w übereinstimmt. Es gibt stets eine und nur eine einzige solche Function und zwar nimmt dieselbe für alle Stellen des Bereiches T nur positive, von Null verschiedene Werthe an.

Die Function $w - w_0$, welche längs der ganzen Begrenzung des Bereiches T den Werth Null hat, genügt für den Bereich T der partiellen Differential-

Für jeden Werth des Index n besteht also die Beziehung

$$(11.) \quad w - w_0 - w_1 - \dots - w_n < q^{n+1} \cdot w.$$

Hieraus folgt, da die Grösse q kleiner als 1 ist, dass die aus den Functionen w_0, w_1, w_2, \dots gebildete unendliche Reihe $w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n + \dots$ in inf. für alle dem Bereiche T angehörenden Stellen (x, y) unbedingt und in gleichem Grade convergirt. Die Function w , deren Existenz vorausgesetzt wurde, ist die Summe dieser Reihe.

12.

Weitere Folgerungen.

Die Function w_0 ist eindeutig bestimmt durch diejenigen Werthe, welche die Function w längs der Begrenzung des Bereiches T annimmt; dasselbe gilt von jeder einzelnen der Functionen $w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$.

Man kann nun die Werthe, welche eine stetige reelle Function $u_0 = u_0(x, y)$ der beiden Argumente x, y längs der Begrenzung des Bereiches T annehmen soll, willkürlich vorschreiben und die partielle Differentialgleichung $\Delta u_0 = 0$ für den Bereich T so integriren, dass die Function $u_0(x, y)$ dieser vorgeschriebenen Grenzbedingung genügt.

Wenn mit k der kleinste, mit g der grösste unter allen denjenigen Werthen bezeichnet wird, welche der Quotient $\frac{u_0(x, y)}{w_0(x, y)}$ längs der Begrenzung des Bereiches T annimmt, so nimmt auch im Innern des Bereiches T von den beiden Functionen $u_0(x, y) - kw_0(x, y)$, $u_0(x, y) - gw_0(x, y)$ die erste an keiner Stelle einen negativen, die zweite an keiner Stelle einen positiven Werth an. Denkt man sich nun für den Bereich T die Functionen $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ bestimmt, welche aus der Function u_0 auf dieselbe Weise hervorgehen, wie die Functionen $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n, \dots$ aus der Function w_0 hervorgegangen sind, so ergibt sich, dass im Innern des Bereiches T von den beiden Functionen $u_n - kw_n$, $u_n - gw_n$ die erste an keiner Stelle einen negativen, die zweite an keiner Stelle einen positiven Werth annimmt.

Hieraus folgt, dass die unendliche Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ für alle Stellen des Bereiches T unbedingt und in gleichem Grade convergirt. Die Summe dieser Reihe, welche mit $u = u(x, y)$ bezeichnet werden soll, ist eine Function, welche in Folge der Gleichung

$$(12.) \quad u(x, y) - u_0(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_T p(\xi, \eta) u(\xi, \eta) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta$$

für den Bereich T der partiellen Differentialgleichung $\Delta u + p \cdot u = 0$ genügt und längs der Begrenzung dieses Bereiches mit der Function $u_0(x, y)$ übereinstimmt.

Hieraus ergibt sich folgender Satz:

Wenn es eine Function w gibt, welche für den betrachteten Bereich T in dem erklärten Sinne der partiellen Differentialgleichung $\Delta w + p \cdot w = 0$ genügt und nur positive, von Null verschiedene Werthe annimmt, so ist es möglich, diese Differentialgleichung für den betrachteten Bereich so zu integrieren, dass das Integral derselben längs der Begrenzung des Bereiches T mit einer beliebig vorgeschriebenen, längs dieser Begrenzung stetigen Function übereinstimmt und im Innern des Bereiches T den angegebenen Bedingungen genügt. Durch die vorgeschriebenen Bedingungen ist dieses particuläre Integral der angegebenen partiellen Differentialgleichung eindeutig bestimmt.

13.

Einführung der Specialisirung $w_0 = 1$.

Wenn die im Art. 11 gestellte Voraussetzung jetzt wieder fallen gelassen und es als noch unentschieden betrachtet wird, ob diese Voraussetzung erfüllt ist, so kann man gleichwohl, ausgehend von einer beliebig getroffenen Festsetzung über diejenigen Werthe, welche eine Function $w_0(x, y)$ längs der Begrenzung des Bereiches T annehmen soll, für den betrachteten Bereich T eine unendliche Reihe von Functionen $w_0, w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$ bestimmen, welche die Eigenschaft haben, dass die Function w_n für jeden positiven Werth des Index n längs der ganzen Begrenzung des Bereiches T den Werth Null annimmt und der partiellen Differentialgleichung $\Delta w_n + p \cdot w_{n-1} = 0$ in dem angegebenen Sinne genügt, während $\Delta w_0 = 0$ ist.

Die einfachste Annahme, von welcher man ausgehen kann, ist, dass der Function w_0 längs der ganzen Begrenzung und demzufolge auch für das Innere des Bereiches T ein constanter Werth und zwar der Werth 1 beigelegt wird.

Diese Annahme soll der folgenden Untersuchung zu Grunde gelegt werden.

Es wird also angenommen, dass für den betrachteten Bereich T eine unendliche Reihe von Functionen $w_0, w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$ bestimmt sei, welche den Bedingungen $w_0 = 1$, $\Delta w_1 + p \cdot w_0 = 0$, $\Delta w_2 + p \cdot w_1 = 0$, \dots , $\Delta w_n + p \cdot w_{n-1} = 0$, \dots genügen. Mit Ausnahme von w_0 ist jede dieser Functionen w_n der ferneren Bedingung unterworfen, längs der ganzen Begrenzung des Bereiches T den Werth Null anzunehmen.

14.

Erklärung der Grössen $W_{m,n}$, $V_{m,n}$, W_n .

Unter Zugrundelegung der Annahme, dass die Functionen $w_0, w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$ die in dem vorhergehenden Art. erklärte Bedeutung haben, sollen, wenn m, n irgend zwei ganze positive Zahlen bezeichnen, einschliesslich der Null, mit $W_{m,n}$ und $V_{m,n}$ die durch die Gleichungen

$$(13.) \quad W_{m,n} = \iint_{\mathbb{T}} p w_m w_n dx dy, \quad V_{m,n} = \iint_{\mathbb{T}} \left(\frac{\partial w_m}{\partial x} \frac{\partial w_n}{\partial x} + \frac{\partial w_m}{\partial y} \frac{\partial w_n}{\partial y} \right) dx dy,$$

erklärten Grössen bezeichnet werden, wobei die Integrationen über den Bereich \mathbb{T} zu erstrecken sind.

Es sollen nun einige zwischen den Werthen dieser bestimmten Integrale bestehende Beziehungen hergeleitet werden, welche für die folgende Untersuchung von wesentlicher Bedeutung sind; zugleich ist der Nachweis zu führen, dass das mit $V_{m,n}$ bezeichnete Doppelintegral für jede Combination m, n der beiden Indices die Eigenschaft besitzt, unbedingt convergent zu sein.

I. Weil das Doppelintegral $\iint_{\mathbb{T}} p w_0 w_{n-1} dx dy = W_{0,n-1}$ nur positive Elemente enthält, so hat jedes Doppelintegral $\iint_{\mathbb{T}'} p w_0 w_{n-1} dx dy$, bei welchem die Integration über einen Theil \mathbb{T}' des Gebietes \mathbb{T} erstreckt wird, einen endlichen Werth, welcher kleiner als $W_{0,n-1}$ ist.

In Folge der Gleichungen $p \cdot w_{n-1} = -\Delta w_n, w_0 = 1$ geht das Doppelintegral $\iint_{\mathbb{T}'} p w_0 w_{n-1} dx dy$ in ein einfaches, längs der Randlinie (\mathbb{T}') des Bereiches \mathbb{T}' zu erstreckendes Integral über, nämlich in das Integral $\int_{(\mathbb{T}')} \frac{\partial w_n}{\partial \nu} dl$, wenn dl die Länge eines Elementes dieser Randlinie, $\frac{\partial w_n}{\partial \nu}$ den Werth der in der Richtung der Normale zu dem Randelemente dl genommenen partiellen Ableitung der Function w_n bezeichnet. Als positive Richtung dieser Normale wird hierbei diejenige fixirt, welche von dem betrachteten Randelemente zu inneren Punkten des Bereiches \mathbb{T}' führt.

Das Integral $\int_{(\mathbb{T}')} \frac{\partial w_n}{\partial \nu} dl$ hat hiernach stets einen endlichen, den Werth der Grösse $W_{0,n-1}$ nicht übertreffenden Werth.

Der getroffenen Festsetzung zufolge ist der Bereich T' ein Theil des Bereiches T . Die Wahl des Bereiches T' ist einzig der Beschränkung unterworfen, dass die Grösse $\frac{\partial w_n}{\partial \nu}$ für jeden Punkt der Begrenzung desselben einen endlichen bestimmten Werth haben muss.

In dem Folgenden wird der Bereich T' der Bedingung gemäss gewählt werden, dass die Gesammtheit der dem Innern dieses Bereiches angehörenden Stellen (x, y) übereinstimmt mit der Gesammtheit derjenigen Stellen (x, y) , für welche der Werth einer der erklärten Functionen $w_m(x, y)$ grösser ist, als eine von Null verschiedene positive, hinsichtlich ihrer Kleinheit keiner Beschränkung unterliegende Grösse ϵ_m .

Ist insbesondere die Function $p(x, y)$ eine analytische Function ihrer beiden Argumente, so ist auch die Gleichung der Begrenzungslinie des auf die angegebene Weise erklärten Bereiches, $w_m(x, y) = \epsilon_m$, eine analytische Linie von endlicher Länge, welche, wenn einzelne Werthe der Grösse ϵ_m ausgeschlossen werden, die Eigenschaft besitzt, dass für jeden Punkt derselben die Grösse $\frac{\partial w_n}{\partial \nu}$ einen endlichen bestimmten Werth hat.

II. Wird dem Index m der Werth n beigelegt und das Gebiet T' durch die Bedingung $w_n(x, y) \geq \epsilon_n$ erklärt, so ergibt sich die Gleichung

$$\iint_{T'} p w_{n-1} w_n dx dy = - \iint_{T'} w_n \Delta w_n dx dy =$$

$$\int_{(T')} w_n \frac{\partial w_n}{\partial \nu} dl + \iint_{T'} \left[\left(\frac{\partial w_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_n}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Da das Randintegral, dessen Werth $\epsilon_n \int_{(T')} \frac{\partial w_n}{\partial \nu} dl$ nicht grösser ist als $\epsilon_n W_{0, n-1}$, für $\lim \epsilon_n = 0$ ebenfalls den Grenzwert Null hat, so ergibt sich, weil beim Uebergange zur Grenze $\epsilon_n = 0$ der Bereich T' in den Bereich T übergeht, die Gleichung

$$(14.) \quad W_{n-1, n} = \iint_T p w_{n-1} w_n dx dy = \iint_T \left[\left(\frac{\partial w_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_n}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = V_{n, n}.$$

Durch die vorstehende Gleichung ist zugleich der Nachweis erbracht, dass das mit $V_{n, n}$ bezeichnete bestimmte Integral, dessen Elemente sämmtlich positiv sind, die Eigenschaft besitzt, unbedingt convergent zu sein.

Aus der unbedingten Convergenz der beiden, der getroffenen Festsetzung zufolge mit $V_{m,m}$ und $V_{n,n}$ zu bezeichnenden bestimmten Integrale ergibt sich als Folge der Beziehungen

$$\left| \frac{\partial w_m}{\partial x} \frac{\partial w_n}{\partial x} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_m}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_n}{\partial x} \right)^2, \quad \left| \frac{\partial w_m}{\partial y} \frac{\partial w_n}{\partial y} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_m}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_n}{\partial y} \right)^2,$$

dass das mit $V_{m,n}$ bezeichnete bestimmte Integral die Eigenschaft, unbedingt convergent zu sein, ebenfalls besitzt.

III. Wenn unter Beibehaltung der im Vorhergehenden unter II. angegebenen Erklärung des Bereiches T' für $p \cdot w_m$ der Ausdruck $-\Delta w_{m+1}$ gesetzt wird, so ergibt sich

$$\iint_{T'} p w_m w_n dx dy = \int_{(T')} w_n \frac{\partial w_{m+1}}{\partial v} dl + \iint_{T'} \left(\frac{\partial w_{m+1}}{\partial x} \frac{\partial w_n}{\partial x} + \frac{\partial w_{m+1}}{\partial y} \frac{\partial w_n}{\partial y} \right) dx dy.$$

Da der Werth des Randintegrals $\int_{(T')} w_n \frac{\partial w_{m+1}}{\partial v} dl$, welcher nicht grösser als $\varepsilon_n W_{0,m}$ ist, für $\lim \varepsilon_n = 0$ ebenfalls den Grenzwert Null besitzt, so ergibt sich, weil für $\lim \varepsilon_n = 0$ der Bereich T' in den Bereich T übergeht, die Gleichung

$$(15.) \quad W_{m,n} = V_{m+1,n}.$$

Den Erklärungen der Grössen $W_{m,n}$, $V_{m,n}$ zufolge ändert keine dieser beiden Grössen bei der Vertauschung beider Indices ihren Werth, es besteht daher die Gleichung

$$(16.) \quad W_{m,n} = V_{m+1,n} = V_{n,m+1}.$$

Andererseits hat in Folge der Gleichung (15.) auch die Grösse $W_{n-1,m+1}$ den Werth $V_{n,m+1}$. Hieraus ergibt sich die Gleichung

$$(17.) \quad W_{m,n} = W_{n-1,m+1} = W_{m+1,n-1}.$$

Durch Wiederholung der Schlussweise, welche von der Grösse $W_{m,n}$ zu der Grösse $W_{m+1,n-1}$ geführt hat, ergibt sich die Gleichung

$$(18.) \quad W_{m,n} = W_{m+1,n-1} = W_{m+2,n-2} = \dots = W_{m+k,n-k} = \dots = W_{m+n,0}.$$

Wird nun die Grösse $W_{m+n,0}$ zur Abkürzung mit W_{m+n} bezeichnet, so ergibt sich

$$(19.) \quad W_{m,n} = W_{m+n}, \quad V_{m,n} = W_{m-1,n} = W_{m+n-1}.$$

Es bestehen also für jeden ganzzahligen Werth von k , welcher kleiner ist als n , die Gleichungen

$$(20.) \quad \iint_{\mathbb{T}} p w_0 w_n dx dy = \iint_{\mathbb{T}} p w_k w_{n-k} dx dy = W_n,$$

$$\iint_{\mathbb{T}} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_n}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial w_n}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\mathbb{T}} \left(\frac{\partial w_{k+1}}{\partial x} \frac{\partial w_{n-k}}{\partial x} + \frac{\partial w_{k+1}}{\partial y} \frac{\partial w_{n-k}}{\partial y} \right) dx dy = W_n.$$

15.

Einführung der Constante c .

Der bekannte Satz, dass die Discriminante einer definiten binären quadratischen Form stets einen positiven von Null verschiedenen Werth besitzt, kann dazu angewendet werden, um eine Beziehung zwischen den absoluten Beträgen der über denselben Bereich \mathbb{T} auszudehnenden drei Doppelintegrale $A = \iint \varphi^2 dx dy$, $B = \iint \varphi \chi dx dy$, $C = \iint \chi^2 dx dy$ herzuleiten, eine Beziehung, deren Kenntniss für die folgende Untersuchung von Wichtigkeit ist.

Die Grössen φ, χ bedeuten zwei reelle, für alle Stellen (x, y) des Bereiches \mathbb{T} eindeutig erklärte Functionen der beiden Argumente x, y , welche die Eigenschaft haben, erstens, dass die über den Bereich \mathbb{T} ausgedehnten Doppelintegrale A, B, C unbedingt convergent sind, zweitens, dass der Quotient der beiden Functionen φ und χ nicht einer Constanten gleich ist.

Unter den angegebenen Voraussetzungen ist die binäre quadratische Form $\iint (\alpha\varphi + \beta\chi)^2 dx dy = A \cdot \alpha^2 + 2B \cdot \alpha\beta + C \cdot \beta^2$ eine definite, weil das Doppelintegral, dessen Werth mit dem Werthe der quadratischen Form übereinstimmt, für kein von dem Werthepaare $\alpha = 0, \beta = 0$ verschiedenes Paar reeller Werthe der Grössen α, β gleich Null wird. Hieraus ergibt sich also die Beziehung

$$(21.) \quad AC - B^2 > 0 \quad \text{oder} \quad |B| < \sqrt{A} \cdot \sqrt{C}.$$

Wenn $\varphi = \sqrt{p} \cdot w_n$, $\chi = \sqrt{p} \cdot w_{n+1}$ gesetzt wird, so erhalten A, B, C beziehlich die Werthe W_{2n} , W_{2n+1} , W_{2n+2} . Es besteht demnach zwischen diesen drei Grössen die Beziehung

$$(22.) \quad \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} < \frac{W_{2n+2}}{W_{2n+1}}.$$

Durch eine ganz analoge Schlussweise ergibt sich aus der Gleichung

$$\iint_{\mathbf{T}} \left[\left(\frac{\partial(\alpha w_n + \beta w_{n+1})}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\alpha w_n + \beta w_{n+1})}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = W_{2n-1} \cdot \alpha^2 + 2 W_{2n} \cdot \alpha\beta + W_{2n+1} \cdot \beta^2$$

die Beziehung

$$(23.) \quad \frac{W_{2n}}{W_{2n-1}} < \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}}.$$

Durch Verbindung der beiden Beziehungen (22.) und (23.) ergibt sich

$$(24.) \quad \frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \frac{W_3}{W_2} < \dots < \frac{W_n}{W_{n-1}} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < \dots$$

Wird nun der Werth des Quotienten $\frac{W_n}{W_{n-1}}$ mit c_n bezeichnet, so wird jedem den angegebenen Bedingungen genügenden Bereiche \mathbf{T} eine unbegrenzte Anzahl beständig zunehmender Constanten $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$ zugeordnet.

Die obere Grenze dieser constanten Grössen, eine für den betrachteten Bereich \mathbf{T} in Bezug auf die zu Grunde gelegte positive Function p charakteristische Constante, möge mit c bezeichnet werden.

Dass die Grössen $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$ eine bestimmte endliche obere Grenze besitzen, kann folgendermassen bewiesen werden.

Es bezeichne g den grössten unter allen denjenigen Werthen, welche die Function w_1 innerhalb des Bereiches \mathbf{T} annimmt. Unter dieser Voraussetzung erlangt keine der Functionen $w_1 - g w_0, w_2 - g w_1, \dots, w_n - g w_{n-1}, \dots$ im Innern des Bereiches \mathbf{T} einen positiven Werth, mithin haben die Grössen

$$W_{2n} - g W_{2n-1} = \iint_{\mathbf{T}} p w_n (w_n - g w_{n-1}) dx dy,$$

$$W_{2n+1} - g W_{2n} = \iint_{\mathbf{T}} p w_{n+1} (w_n - g w_{n-1}) dx dy$$

negative Werthe, folglich ist jede der beiden Grössen c_{2n}, c_{2n+1} kleiner als die Grösse g . Hieraus ergibt sich aber, dass die obere Grenze c der Constanten $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$ einen endlichen Werth besitzt.

16.

Einführung der Grösse Q .

Aus der im vorhergehenden Art. abgeleiteten Beziehung zwischen den Werthen der mit A, B, C bezeichneten drei Doppelintegrale ergibt sich, wenn

$\varphi = p(x, y) \frac{w_{n-1}(x, y)}{\sqrt{W_{2n}}}$, $\chi = G(x, y; \xi, \eta)$ gesetzt, und der grösste Werth der Function $p(x, y)$ mit P , der grösste Werth, den das Doppelintegral

$$\iint_{\mathbf{T}} G^2(x, y; \xi, \eta) dx dy$$

annehmen kann, mit Ω bezeichnet wird, dass die durch die Gleichung

$$\frac{w_n(\xi, \eta)}{\sqrt{W_{2n}}} = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbf{T}} p(x, y) \frac{w_{n-1}(x, y)}{\sqrt{W_{2n}}} G(x, y; \xi, \eta) dx dy$$

bestimmte Grösse $\frac{w_n(\xi, \eta)}{\sqrt{W_{2n}}}$ stets kleiner ist als die Grösse $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{P\Omega}{c_{2n-1}c_{2n}}}$, mithin für alle Werthe des Index n kleiner ist als die Grösse $\frac{1}{2\pi c_1} \sqrt{P\Omega}$, welche mit Q bezeichnet werden möge.

Bezeichnet R den grössten unter allen denjenigen Werthen, welche die Grösse $\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ unter der Voraussetzung annimmt, dass jede Stelle (x, y) des Bereiches \mathbf{T} mit jeder anderen Stelle (ξ, η) dieses Bereiches combinirt wird, und wird mit μ die Zahl der Blätter derjenigen RIEMANN'schen Fläche bezeichnet, welche den Bereich \mathbf{T} geometrisch darstellt, so ergibt sich

$$G(x, y; \xi, \eta) < \log \frac{R}{\rho}, \quad \Omega < \mu \int_{\rho=0}^{\rho=R} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} \log^2 \left(\frac{R}{\rho} \right) \rho d\rho d\vartheta, \quad \Omega < \frac{1}{2} \mu R^2 \pi.$$

17.

Untersuchung der Convergenz der Reihe $w_0 + w_1 + w_2 + \dots$

Aus der in dem vorhergehenden Art. bewiesenen Eigenschaft der Grösse $\frac{w_n}{\sqrt{W_{2n}}}$, für keinen Werth des Index n die Grösse Q zu überschreiten, ergibt sich, dass die Reihe

$$(25.) \quad w = w(x, y; t) = w_0 + w_1(x, y)t + w_2(x, y)t^2 + \dots + w_n(x, y)t^n + \dots \text{ in inf.}$$

für alle Werthe der Grösse t , deren absoluter Betrag kleiner ist als $\frac{1}{c}$, unbedingt und zugleich für alle dem Bereiche \mathbf{T} angehörende Stellen (x, y) in gleichem Grade convergirt.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt aus dem Umstande, dass die einzelnen Glieder der angegebenen Reihe (25.) dem absoluten Betrage nach beziehlich

kleiner sind als die Glieder der Reihe

$$Q(\sqrt{W_0} + \sqrt{W_2} \cdot t + \sqrt{W_4} \cdot t^2 + \dots + \sqrt{W_{2n}} \cdot t^n + \dots),$$

während der Quotient zweier auf einander folgenden Glieder dieser letzteren gleich $\sqrt{c_{2n-1} c_{2n}} \cdot t$ ist, der Grenzwert dieses Quotienten für $\lim n = \infty$ also den Werth $c \cdot t$ hat.

Mittelst der Formel (6.) des Art. 10 ergibt sich, wenn an die Stelle der Function $f(\xi, \eta)$ der Ausdruck $tp(\xi, \eta) w(\xi, \eta; t)$ gesetzt wird, dass die Function $w = w(x, y; t)$ für alle Werthe der Grösse t , welche kleiner als $\frac{1}{c}$ sind, in dem früher angegebenen Sinne die partielle Differentialgleichung $\Delta w + tp \cdot w = 0$ befriedigt.

Hieraus folgt, dass, wenn die Grösse c kleiner als 1 ist, die im Art. 9 aufgestellte Frage in bejahendem Sinne zu beantworten ist, weil in diesem Falle der Grösse t der Werth 1 beigelegt werden kann.

18.

Untersuchung der Convergenz einiger unendlicher Producte.

Aus der im Art. 16 bewiesenen Eigenschaft der Grösse $\frac{w_n}{\sqrt{W_{2n}}}$, für jeden Werth des Index n kleiner zu bleiben, als eine bestimmte endliche Grösse Q , ergibt sich ferner, wenn in der Gleichung $\iint_{\mathbb{T}} p \frac{w_n}{\sqrt{W_{2n}}} \frac{w_n}{\sqrt{W_{2n}}} dx dy = 1$ der eine der beiden Factoren $\frac{w_n}{\sqrt{W_{2n}}}$ des unter dem Integralzeichen stehenden Ausdruckes durch Q ersetzt wird, dass die Beziehung besteht

$$\iint_{\mathbb{T}} p \frac{w_n}{\sqrt{W_{2n}}} Q dx dy > 1.$$

Hieraus folgt, dass die Grösse $\frac{W_n}{\sqrt{W_{2n}}} = \iint_{\mathbb{T}} p \frac{w_n}{\sqrt{W_{2n}}} dx dy$ für jeden Werth des Index n grösser ist als die Grösse $\frac{1}{Q}$, und dass die Grösse $\frac{W_n^2}{W_{2n}}$ für jeden Werth des Index n grösser ist als $\frac{1}{Q^2}$.

Da die Grösse $\frac{W_n^2}{W_{2n}}$ den Werth $W_0 \cdot \frac{c_1^2}{c_1 c_2} \cdot \frac{c_2^2}{c_3 c_4} \cdot \frac{c_3^2}{c_5 c_6} \cdot \dots \cdot \frac{c_n^2}{c_{2n-1} c_{2n}}$ besitzt, welcher beständig abnimmt, wenn der Index n zunimmt, und da diese Grösse beständig grösser ist als die von dem Werthe des Index n nicht abhängende

Grösse $\frac{1}{Q^2}$, so besitzt die Grösse $\frac{W_n^2}{W_{2n}}$ für $\lim n = \infty$ einen bestimmten endlichen von Null verschiedenen Grenzwert, mit anderen Worten, das unendliche Product $\prod_n \left(\frac{c_n^2}{c_{2n-1} c_{2n}} \right)$, dessen Factoren sämtlich kleiner sind als die Einheit, ist unbedingt convergent.

Hieraus folgt unter Berücksichtigung der Beziehung $\frac{c_n^2}{c_{2n-1} c_{2n}} < \frac{c_n}{c_{2n}} < 1$, dass auch das unendliche Product $\prod_n \left(\frac{c_n}{c_{2n}} \right)$ unbedingt convergent ist.

Die Factoren des letzteren unendlichen Productes können nun in der Weise in unendlich viele Gruppen von je unendlich vielen Factoren zusammengefasst werden,

$$\begin{aligned} \prod_n \left(\frac{c_n}{c_{2n}} \right) &= \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{c_2}{c_4} \cdot \frac{c_4}{c_8} \cdot \frac{c_8}{c_{16}} \cdot \frac{c_{16}}{c_{32}} \dots \\ &\times \frac{c_3}{c_6} \cdot \frac{c_6}{c_{12}} \cdot \frac{c_{12}}{c_{24}} \cdot \frac{c_{24}}{c_{48}} \dots \\ &\times \frac{c_5}{c_{10}} \cdot \frac{c_{10}}{c_{20}} \cdot \frac{c_{20}}{c_{40}} \dots \\ &\times \frac{c_7}{c_{14}} \cdot \frac{c_{14}}{c_{28}} \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

dass sich die Gleichung $\prod_n \left(\frac{c_n}{c_{2n}} \right) = \frac{c_1}{c} \cdot \frac{c_3}{c} \cdot \frac{c_5}{c} \cdot \frac{c_7}{c} \dots = \prod_n \left(\frac{c_{2n-1}}{c} \right)$ ergibt. Es ist also auch das unendliche Product $\prod_n \left(\frac{c_{2n-1}}{c} \right)$ unbedingt convergent; folglich besitzt, da $\frac{c_{2n-1}}{c} < \frac{c_{2n}}{c} < 1$ ist, das unendliche Product $\prod_n \left(\frac{c_{2n}}{c} \right)$ dieselbe Eigenschaft.

Hieraus ergibt sich aber die unbedingte Convergenz des unendlichen Productes $\prod_n \left(\frac{c_{2n-1}}{c} \cdot \frac{c_{2n}}{c} \right) = \prod_n \left(\frac{c_n}{c} \right)$.

19.

Einführung der Functionen w_n und der Grössen \mathfrak{B}_m . Der Fall $c = 1$.

Wenn die Functionen w_n und die Grössen \mathfrak{B}_m durch die Gleichungen $w_n = c^n w_{n-1}$, $W_m = c^m \mathfrak{B}_m$ erklärt werden, so bestehen die Gleichungen

$$\Delta w_n + \frac{1}{c} p \cdot w_{n-1} = 0, \quad \mathfrak{B}_m = W_0 \cdot \frac{c_1}{c} \cdot \frac{c_2}{c} \cdot \frac{c_3}{c} \dots \frac{c_m}{c}.$$

In Folge der unbedingten Convergenz des unendlichen Productes $\prod_n \left(\frac{c_n}{c}\right)$ nähert sich der Werth der Grösse \mathfrak{B}_m für unbegrenzt wachsende Werthe des Index m beständig abnehmend einem bestimmten von Null verschiedenen Grenzwerte, welcher mit \mathfrak{B} bezeichnet werden soll.

Es ergibt sich $\iint_T p \cdot w_n dx dy = \mathfrak{B}_n$, $\iint_T p \cdot w_m w_n dx dy = \mathfrak{B}_{m+n}$, $w_n < Q \sqrt{\mathfrak{B}_{2n}}$.

Aus der Gleichung $\iint_T p (w_n - w_{n+k})^2 dx dy = \mathfrak{B}_{2n} - 2\mathfrak{B}_{2n+k} + \mathfrak{B}_{2n+2k}$ wird

zunächst gefolgert, dass der Werth des auf der linken Seite dieser Gleichung stehenden Doppelintegrals für jeden beliebig grossen positiven ganzzahligen Werth der Grösse k unendlich klein wird für unendlich grosse Werthe

des Index n . Folglich wird auch das Doppelintegral $\iint_T p^2 (w_n - w_{n+k})^2 dx dy$,

dessen Werth kleiner ist als $P(\mathfrak{B}_{2n} - 2\mathfrak{B}_{2n+k} + \mathfrak{B}_{2n+2k}) = Q_n$, für unendlich grosse Werthe des Index n unendlich klein. Hieraus ergibt sich als eine Folge der Gleichung

$$w_{n+1}(x, y) - w_{n+k+1}(x, y) = \frac{1}{2\pi c} \iint_T p(\xi, \eta) \left[w_n(\xi, \eta) - w_{n+k}(\xi, \eta) \right] G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta$$

bei Anwendung des im Art. 15 bewiesenen Hilfssatzes, dass

$$\left| w_{n+1}(x, y) - w_{n+k+1}(x, y) \right| < \frac{1}{2\pi c} \sqrt{\Omega Q_n}.$$

Also wird der absolute Betrag der Differenz $w_{n+1}(x, y) - w_{n+k+1}(x, y)$, wenn k eine beliebig grosse positive ganze Zahl bezeichnet, für unendlich grosse Werthe des Index n für alle dem Bereiche T angehörenden Stellen (x, y) in gleichem Grade unendlich klein.

Hieraus ergibt sich aber, dass die Functionen $w_n(x, y)$ für unendlich grosse Werthe des Index n gegen eine bestimmte Grenzfuction convergiren, welche mit $w = w(x, y)$ bezeichnet werden soll.

Diese Grenzfuction w genügt in dem früher angegebenen Sinne für den Bereich T der partiellen Differentialgleichung $\Delta w + \frac{1}{c} p \cdot w = 0$ und nimmt längs der ganzen Begrenzung des Bereiches T den Werth Null an.

Es ist hiermit der Satz bewiesen: Wenn die bei Zugrundelegung der Function p für den betrachteten Bereich T sich ergebende Constante c den Werth 1 besitzt, so gibt es stets eine Function w , welche für den Bereich T der partiellen Differentialgleichung $\Delta w + p \cdot w = 0$ genügt, welche längs der

ganzen Begrenzung des Bereiches T den Werth Null, im Innern desselben aber nur positive Werthe annimmt.

20.

Die Constante $\frac{1}{c}$ als Minimum. Folgerungen.

Es bezeichne $u = u(x, y)$ eine stetige, für alle dem Bereiche T angehörenden Stellen (x, y) eindeutig erklärte Function der beiden Argumente x, y , welche, ohne beständig gleich Null zu sein, längs der ganzen Begrenzung des betrachteten Bereiches den Werth Null annimmt und für welche das über den Bereich T ausgedehnte Doppelintegral $\iint_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$ eine bestimmte Bedeutung hat.

Wenn die Werthe der beiden Doppelintegrale

$$\iint_T p \cdot u^2 dx dy \quad \text{und} \quad \iint_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

zur Abkürzung beziehlich mit $J_0(u)$ und $J_1(u)$ bezeichnet werden und mit w , unter der Voraussetzung, dass der Grösse t ein positiver Werth beigelegt wird, welcher kleiner ist als $\frac{1}{c}$, die im Art. 17 (25.) erklärte Function $w(x, y; t)$ bezeichnet wird, so besteht die Gleichung

$$(26.) \quad J_1(u) - t J_0(u) = \iint_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{w} \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{w} \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

welche sich aus der Identität

$$(27.) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - t p u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{w} \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{w} \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{w} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{u^2}{w} (\Delta w + t p w)$$

durch Integration ergibt.

Der Gleichung (26.) zufolge ist der Werth des Quotienten $\frac{J_1(u)}{J_0(u)}$ für jede den angegebenen Bedingungen genügende Function u grösser als die Grösse t . Hieraus ergibt sich zunächst der Satz: Unter denjenigen Werthen, welche der Quotient $\frac{J_1(u)}{J_0(u)}$ unter den angegebenen Bedingungen annehmen kann, gibt es keinen Werth, welcher kleiner als $\frac{1}{c}$ ist.

Bezeichnet $w = w(x, y)$ die im Art. 19 erklärte Function, so ergibt sich in Folge der Identität

$$(28.) \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{c} p w^2 = \frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(w \frac{\partial w}{\partial y} \right) - w \left(\Delta w + \frac{1}{c} p w \right)$$

durch ein Verfahren, welches dem im Art. 14 dargelegten Schlussverfahren analog ist, die Gleichung

$$J_1(w) - \frac{1}{c} J_0(w) = 0.$$

Hieraus folgt: Der Werth der Grösse $\frac{1}{c}$ ist der kleinste unter denjenigen Werthen, welche der Quotient $\frac{J_1(u)}{J_0(u)}$ unter den angegebenen Bedingungen annehmen kann.

Bei gewissen auf den betrachteten Bereich T sich beziehenden Problemen der Variationsrechnung führt die Untersuchung der in Betracht kommenden zweiten Variation zu der Frage, ob ein über diesen Bereich auszudehnendes Doppelintegral

$$\iint_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - p \cdot u^2 \right] dx dy = J_1(u) - J_0(u) = J(u)$$

für alle, den angegebenen Bedingungen genügenden Functionen u nur positive Werthe annimmt, oder ob es auch solche Functionen u gibt, für welche dieses Integral den Werth Null oder negative Werthe annimmt.

Diese Frage kann, wenn die Function p den im Art. 9 angegebenen Bedingungen genügt, nach dem Resultate der vorstehenden Untersuchung wie folgt beantwortet werden.

I. Wenn die bei Zugrundelegung der Function p für den betrachteten Bereich sich ergebende Constante c kleiner ist als 1, so nimmt das Doppelintegral $J(u)$ für alle Functionen, welche den angegebenen Bedingungen genügen, positive Werthe an.

II. Wenn diese Constante den Werth 1 besitzt, so nimmt das Doppelintegral $J(u)$ ausser positiven Werthen auch den Werth Null, aber keinen negativen Werth an.

III. Wenn die Constante c grösser als 1 ist, so nimmt das Doppelintegral $J(u)$ ausser positiven Werthen und dem Werthe Null auch negative Werthe an.

Es bezeichne $v = v(x, y)$ ein für alle Stellen (x, y) des Bereiches T eindeutig erklärtes, den im Art. 9 angegebenen Bedingungen genügendes particuläres Integral der partiellen Differentialgleichung $\Delta v + p \cdot v = 0$.

Bezeichnet ε eine reelle Constante, so ergibt sich $J(v + \varepsilon u) - J(v) = \varepsilon^2 J(u)$. Hieraus folgt, dass die Grösse $J(v)$ kleiner ist als jede der Grössen $J(v + \varepsilon u)$, wenn $c < 1$ ist. Ist $c = 1$, so besteht für alle Werthe von ε die Gleichung $J(v + \varepsilon u) = J(v)$. Ist endlich $c > 1$, so gibt es unter den Werthen, welche die Grösse $J(v + \varepsilon u)$ annehmen kann, sowohl solche, welche grösser sind als $J(v)$, als auch solche, die kleiner sind als $J(v)$.

21.

Stetige Aenderung des Werthes der Constante c
bei stetiger Verkleinerung des Bereiches T .

Mit T und T' mögen zwei den angegebenen Bedingungen genügende Bereiche bezeichnet werden, welche zu einander in der Beziehung stehen, dass der Bereich T den Bereich T' als Theil enthält. Derjenige Bereich, welcher sich ergibt, wenn aus dem Bereiche T alle Stellen ausgeschieden werden, welche dem Innern des Bereiches T' angehören, möge mit T'' , die den beiden Bereichen T' und T'' gemeinsame Begrenzungslinie möge mit (T') bezeichnet werden.

Es seien c und c' die unter Zugrundelegung der Function p für die beiden Bereiche T und T' sich ergebenden charakteristischen Constanten.

Bezeichnet $v = v(x, y)$ ein Function, welche für den Bereich T' dieselbe Bedeutung hat, wie nach dem Inhalte des Art. 19 die Function w für den Bereich T , und wird festgesetzt, dass der Function $v(x, y)$ für die dem Bereiche T'' angehörnden Stellen (x, y) der Werth Null beigelegt werden soll, so ergibt sich die Gleichung

$$J_1(v + \varepsilon u) - \frac{1}{c'} J_0(v + \varepsilon u) = 2\varepsilon \iint_{T'} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{c'} p v u \right) dx dy + \varepsilon^2 \left[J_1(u) - \frac{1}{c'} J_0(u) \right],$$

in welcher die Function u die im Art. 20 erklärte Bedeutung hat.

Bezeichnet jetzt dl die Länge eines Elementes der den Bereichen T' und T'' gemeinsamen Begrenzungslinie (T') , $\frac{\partial v}{\partial \nu}$ die in der Richtung der Normale dieses Elementes genommene partielle Ableitung, wobei diejenige Richtung dieser Normale als positiv betrachtet wird, welche in das Innere des Bereiches T' führt, so ergibt sich

$$(29.) \quad J_1(v + \varepsilon u) - \frac{1}{c'} J_0(v + \varepsilon u) = - 2\varepsilon \int_{(T')} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dl + \varepsilon^2 \left[J_1(u) - \frac{1}{c'} J_0(u) \right].$$

Die Function u kann, weil die partielle Ableitung $\frac{\partial v}{\partial v}$ weder längs der ganzen Begrenzung des Bereiches T' , noch längs eines Theiles derselben den Werth Null annimmt, stets so gewählt werden, dass das Integral $\int_{(T')} u \frac{\partial v}{\partial v} dl$ einen von Null verschiedenen Werth erhält.

Hieraus ergibt sich, dass die Grösse $J_1(v + \varepsilon u) - \frac{1}{c} J_0(v + \varepsilon u)$ bei passender Wahl der Grösse ε und der Function u auch negative Werthe annimmt; der Quotient $\frac{J_1(v + \varepsilon u)}{J_0(v + \varepsilon u)}$ nimmt demnach auch solche Werthe an, die kleiner sind als die Grösse $\frac{1}{c}$; also ist die Grösse $\frac{1}{c}$ kleiner als die Grösse $\frac{1}{c'}$, mithin c grösser als c' .

Hieraus folgt: wenn der Bereich T' ein Theil des Bereiches T ist, so ist die unter Zugrundelegung der betrachteten Function p für den Bereich T' sich ergebende Constante c' kleiner als die unter Zugrundelegung dieser Function für den Bereich T sich ergebende Constante c .

Es soll nun bewiesen werden, dass bei einer stetigen Verkleinerung des Bereiches T der Werth der Constante c sich ebenfalls stetig ändert.

Für den Bereich T denke man sich die im Art. 19 erklärte Function $w = w(x, y)$ bestimmt, welche, wenn die Grösse $\frac{1}{c}$ mit t bezeichnet wird, im angegebenen Sinne der partiellen Differentialgleichung $\mathcal{A}w + t p \cdot w = 0$ genügt und längs der ganzen Begrenzung des Bereiches T den Werth Null annimmt. Es werde nun, wenn ε eine von Null verschiedene positive Grösse bezeichnet, deren Kleinheit keiner Beschränkung unterliegt, derjenige Theil des Bereiches T , für welchen $w(x, y) \geq \varepsilon$ ist, mit T' bezeichnet. Dieselbe Bedeutung, welche die Functionen $w_n = w_n(x, y)$ und die Grössen W_n, c_n, c für den Bereich T besitzen, möge den Functionen $v_n = v_n(x, y)$ und den Grössen V_n, c'_n, c' für den Bereich T' zukommen.

Für alle dem Bereiche T' angehörnden Stellen (x, y) gilt, da die Function w für keine dieser Stellen den Werth Null annimmt, dem Inhalte des Art. 17 zufolge die Gleichung

$$w = \varepsilon(v_0 + v_1 t + v_2 t^2 + v_3 t^3 + \dots),$$

aus welcher sich durch Integration ergibt

$$\iint_{T'} p w dx dy = \varepsilon(V_0 + V_1 t + V_2 t^2 + V_3 t^3 + \dots) = \varepsilon V_0 (1 + c'_1 t + c'_1 c'_2 t^2 + c'_1 c'_2 c'_3 t^3 + \dots).$$

Wenn \mathfrak{B}' den Werth des Doppelintegrals auf der linken Seite dieser Gleichung bezeichnet, so ergibt sich, weil jede der Grössen c'_n kleiner als c' und die Grösse $c' t = \frac{c'}{c}$ kleiner als 1 ist,

$$\mathfrak{B}' < \varepsilon V_0 \cdot \frac{1}{1-c't}, \quad \mathfrak{B}'(c-c') < \varepsilon V_0 c.$$

Da $\lim \mathfrak{B}'$ für $\lim \varepsilon = 0$ von Null verschieden ist, so folgt, dass die Grösse $c - c'$ für unendlich kleine Werthe von ε ebenfalls unendlich klein wird.

Bezeichnet nun T^* einen beliebigen Bereich, welcher den Bereich T' als Theil enthält und selbst wieder ein Theil des Bereiches T ist, und bezeichnet c^* den Werth der diesem Bereiche in Bezug auf die Function p entsprechenden charakteristischen Constante, so ergibt sich aus zweimaliger Anwendung des zu Anfang dieses Art. bewiesenen Satzes, dass zwischen den Werthen der drei Constanten c', c^*, c die Beziehung $c' < c^* < c$ besteht.

Hiermit ist der Satz bewiesen:

Bei jeder stetigen Verkleinerung des Bereiches T ändert sich der Werth der diesem Bereiche in Bezug auf die Function p entsprechenden charakteristischen Constante c ebenfalls stetig.

22.

Anwendung auf den Fall $p = \frac{8}{(1+x^2+y^2)^2}$.

Wenn die Function p durch die Gleichung $p = \frac{8}{(1+x^2+y^2)^2}$ bestimmt und $x + yi = s$, $x - yi = s_1$, $w = \psi$ gesetzt wird, so geht die partielle Differentialgleichung $\Delta w + p \cdot w = 0$ über in

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial s_1} + \frac{2\psi}{(1+ss_1)^2} = 0,$$

deren allgemeines Integral, wenn mit $G(s)$, $G_1(s_1)$ zwei Functionen der beiden complexen Grössen s, s_1 bezeichnet werden, durch die Gleichung

$$\psi = G'(s) + G'_1(s_1) - \frac{2}{1+ss_1} (s_1 G(s) + s G_1(s_1))$$

gegeben wird.

Wird die Bedingung gestellt, dass jedem Paare conjugirter Werthe s, s_1 ein reeller Werth der Grösse ψ entsprechen soll, so muss die Function $G_1(s_1)$ mit der zu der Function $G(s)$ gehörenden conjugirten Function des conjugirten complexen Argumentes übereinstimmen.

Die Form der betrachteten partiellen Differentialgleichung bleibt ungeändert, wenn auf dieselbe die gleichzeitigen Substitutionen

$$s = \frac{as' - b}{b_1 s'_1 + a_1}, \quad s_1 = \frac{a_1 s'_1 - b_1}{b s'_1 + a}$$

angewendet werden. Hierbei bezeichnen s', s'_1 zwei complexe veränderliche,

a, a_1, b, b_1 vier reelle oder complexe constante Grössen, welche letzteren der Bedingung unterworfen sind, dass die aus denselben gebildete Grösse $aa_1 + bb_1$ nicht gleich Null sein darf. Damit jedem Paare conjugirter Werthe der Grössen s, s_1 ein paar conjugirter Werthe der Grössen s', s'_1 entspreche, sind den Grössen $a, a_1; b, b_1$ zwei Paare conjugirter Werthe beizulegen.

Durch die Gleichungen

$$X = \frac{s + s_1}{ss_1 + 1}, \quad Y = \frac{1}{i} \cdot \frac{s - s_1}{ss_1 + 1}, \quad Z = \frac{ss_1 - 1}{ss_1 + 1}$$

wird ein eindeutiges Entsprechen zwischen den Punkten der xy -Ebene und den Punkten der Kugelfläche $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ vermittelt. Es entspricht daher jedem der betrachteten Bereiche T ein gewisser sphärischer Bereich, welcher das sphärische Bild desselben genannt werden kann.

Durch die angegebenen Substitutionen wird in Folge der Gleichung

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \frac{4ds ds_1}{(ss_1 + 1)^2} = \frac{4ds' ds'_1}{(s's'_1 + 1)^2}$$

nur die Lage, nicht die Gestalt dieses sphärischen Bildes verändert.

Der Gesammtheit aller gleichzeitigen Substitutionen $(s, s'), (s_1, s'_1)$ entspricht unter den bezüglich der Grössen a, a_1, b, b_1 gestellten Bedingungen die Gesammtheit aller Drehungen der Kugelfläche $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$.

Bei Zugrundelegung der im Vorstehenden bezüglich der Function p gemachten Annahme ist es daher möglich, von der über der xy -Ebene ausgebreiteten RIEMANN'schen Fläche, durch welche der Bereich T geometrisch dargestellt wird, zu dem sphärischen Bilde derselben überzugehen und die Ergebnisse der im Vorhergehenden angestellten Untersuchungen, insbesondere die aus dem Werthe der Grösse c zu ziehenden Schlussfolgerungen auf das sphärische Bild zu übertragen.

Durch Einführung der Grössen s, s_1 als unabhängiger Variablen erhält die partielle Differentialgleichung der Kugelfunctionen n^{ten} Ranges die Gestalt

$$\frac{\partial^2 X_n}{\partial s \partial s_1} + \frac{n(n+1) X_n}{(1 + ss_1)^2} = 0.$$

Hieraus folgt, dass jede der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial s_1} + \frac{2\psi}{(1 + ss_1)^2} = 0$$

genügende Function eine Kugelfunction ersten Ranges ist.

Durch Specialisirung der Function $G(s)$ kann man unendlich viele spe-

cielle sphärische Bereiche erhalten, von welchen jeder einzelne so beschaffen ist, dass eine bestimmte Kugelfunction ersten Ranges für diesen Bereich den im Art. 8 unter II. angegebenen Bedingungen genügt.

Bei Zugrundelegung der Function $p = \frac{8}{(1+x^2+y^2)^2}$ hat die Constante c für alle diese Bereiche den Werth 1.

Wenn $G(s) = \frac{1}{2}s$ gesetzt wird, so ergibt sich $\psi = \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$.

Dem Bereiche $\psi \geq 0$ entspricht in diesem Falle die Fläche einer Halbkugel.

Nach dem Inhalte des Art. 21 folgt hieraus, dass für jeden Bereich T' , dessen sphärisches Bild ein Theil einer Halbkugelfläche ist, der Werth der charakteristischen Constante c' kleiner als 1 ist.

Wenn der Werth der unter Zugrundelegung der Function $p = \frac{8}{(1+x^2+y^2)^2}$ für einen Bereich T sich ergebenden Constante c grösser als 1 ist, so ist es auf unendlich mannigfaltige Weise möglich, einen Theil T' dieses Bereiches so abzugrenzen, dass das sphärische Bild desselben ein Theil einer Halbkugelfläche ist, dass also die dem abgegrenzten Bereiche T' entsprechende charakteristische Constante c' kleiner als 1 ist.

Ebenso ist es auf unendlich mannigfaltige Weise möglich, eine von einem Parameter abhängende, die beiden Bereiche T und T' enthaltende Schaar von Bereichen zu construiren, so dass für je zwei unendlich benachbarte Bereiche dieser Schaar die Voraussetzungen des im vorhergehenden Art. bewiesenen Lehrsatzes erfüllt sind.

Bezeichnet T^* einen beliebigen Bereich dieser Schaar und c^* die diesem Bereiche in Bezug auf die Function $p = \frac{8}{(1+x^2+y^2)^2}$ entsprechende Constante, so folgt, dass die Grösse c^* jeden zwischen c' und c liegenden Werth annimmt.

Es ist also der Satz bewiesen: Wenn die bei Zugrundelegung der Function $p = \frac{8}{(1+x^2+y^2)^2}$ für einen bestimmten Bereich T sich ergebende charakteristische Constante c grösser als 1 ist, so ist es auf unendlich mannigfaltige Weise möglich, von diesem Bereiche einen Theilbereich T^* abzugrenzen, für welchen die unter Zugrundelegung derselben Function p sich ergebende Constante c^* den Werth 1 besitzt.

In Hinblick auf den im Art. 19 bewiesenen Lehrsatz ist somit der Nachweis geliefert, dass die im Art. 8 betrachteten drei Fälle die Gesammtheit aller Fälle erschöpfen, welche in Bezug auf die Entscheidung der gestellten Frage eintreten können.

SCHLUSS.

Einige den Grenzfall betreffende Bemerkungen.

23.

Den Bedingungen des Grenzfalles entsprechende Minimalflächenstücke, für welche die Eigenschaft des Minimums im gewöhnlichen Sinne zu bestehen aufhört.

Verallgemeinerung des von Herrn LINDELÖF zuerst untersuchten speciellen Falles.

Wenn für ein Minimalflächenstück M der im Art. 8 unter II. angeführte Grenzfall eintritt, so kann die Frage aufgeworfen werden, ob, beziehungsweise in welchem Sinne für dieses Flächenstück unter der Voraussetzung, dass die Begrenzungslinie desselben unverändert gelassen wird, ein Minimum des Flächeninhalts eintritt.

Zur Beantwortung dieser Frage kann man sich der Gleichung (5.) des Art. 2 und der Formeln des Art. 7 bedienen.

Unter Wiederaufhebung der Bedingung, dass die Function ψ auch längs der ganzen Begrenzung des Bereiches T nur von Null verschiedene Werthe annehmen soll, möge in den Formeln des Art. 7 für die Function ψ das den Bedingungen des erwähnten Grenzfalles genügende particuläre Integral der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{8\psi}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2} = 0$ gesetzt werden. Die Veränderlichkeit der Grössen ξ, η werde auf den Bereich T , die Veränderlichkeit des Parameters ε auf solche Werthe beschränkt, deren absoluter Betrag eine gewisse von Null verschiedene positive Grösse ε' nicht überschreitet.

Für jeden hinreichend kleinen Werth der Grösse ε' stellen unter den angegebenen Voraussetzungen die Gleichungen

$$x' = x + \varepsilon \delta x, \quad y' = y + \varepsilon \delta y, \quad z' = z + \varepsilon \delta z,$$

wenn x', y', z' die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes bedeuten, eine Schaar von Minimalflächenstücken dar, welche so beschaffen ist, dass für je zwei unendlich benachbarte Minimalflächenstücke dieser Schaar die im Art. 1 angegebenen Bedingungen erfüllt sind.

Die Gesamtheit derjenigen Tangentialebenen des Minimalflächenstückes M , deren Berührungspunkte der Randlinie dieses Flächenstückes angehören, umhüllt allgemein zu reden eine gewisse abwickelbare geradlinige Fläche, welche mit Φ bezeichnet werden möge. Die erzeugenden Geraden dieser Fläche fallen mit den Tangenten der Randlinie des Flächenstückes M im DUPIN'schen Sinne conjugirten Tangenten dieses Flächenstückes zusammen. Für jeden Punkt der Randlinie ist die letztere Tangente, mithin auch die durch diesen Punkt hindurchgehende geradlinige Erzeugende der Fläche Φ , der Strecke mit den Coordinaten $\delta x, \delta y, \delta z$ parallel.

In Folge der Gleichungen

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0, \quad Xd\delta x + Yd\delta y + Zd\delta z = 0, \quad X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0,$$

von denen die beiden ersten für alle Stellen (ξ, η) des Bereiches T erfüllt sind, während die dritte nur längs der Begrenzung desselben Geltung hat, ist die abwickelbare Fläche Φ eine einhüllende Fläche der betrachteten Schaar von Minimalflächen.

Die Gesamtheit aller Punkte der Fläche Φ , welche den dem Intervalle $-\epsilon' \leq \epsilon \leq \epsilon'$ angehörnden Werthen des Parameters ϵ entsprechen, bildet allgemein zu reden eine endliche Anzahl gürtelförmiger Flächenstreifen Γ , von welchen jeder aus einer endlichen Anzahl von Stücken analytischer Flächen besteht.

Die Gesamtheit der Flächenstreifen Γ und die den Werthen $\epsilon = -\epsilon', \epsilon = \epsilon'$ entsprechenden Minimalflächenstücke der betrachteten Schaar bilden zusammengenommen die vollständige Begrenzung eines ganz im Endlichen liegenden Theiles des Raumes, welcher mit R bezeichnet werden möge.

In Folge der Gleichung (5.) des Art. 2 gilt folgender Satz: Jedes zusammenhängende, aus einer endlichen Anzahl von Stücken analytischer Flächen gebildete Flächenstück F , dessen vollständige Begrenzung mit der Begrenzung des Minimalflächenstückes M zusammenfällt, und dessen innere Punkte sämtlich dem Innern des Raumes R angehören, hat grösseren Flächeninhalt, als das Minimalflächenstück M .

Die Geltung des vorstehenden Satzes erstreckt sich nicht ohne Weiteres auch auf solche Flächenstücke, welche zwar aus dem Raume R nicht heraustreten, jedoch mit den der Begrenzung desselben angehörnden Theilen der Fläche Φ Flächenstreifen von endlicher Ausdehnung gemeinsam haben.

Es kann nämlich der Fall eintreten, dass für ein den Bedingungen des Grenzfalles genügendes Minimalflächenstück M der reelle Theil der complexen Grösse $\frac{1}{\delta(s)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \right)^2$ längs der ganzen Begrenzung des Bereiches T dasselbe Vor-

zeichen besitzt. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so liegen alle Theile der Fläche Φ , aus denen die Flächenstreifen Γ bestehen, auf derselben Seite des Minimalflächenstückes M und es gibt unendlich viele aus dem Raume R nicht heraustretende, im Uebrigen den gestellten Bedingungen genügende Flächenstücke F^* , deren Flächeninhalt mit dem Flächeninhalte des Minimalflächenstückes M der Grösse nach übereinstimmt.

Jedes dieser Flächenstücke F^* besteht aus einem Minimalflächenstücke M^* der betrachteten Schaar und einer endlichen Anzahl gürtelförmiger Flächenstreifen Γ^* , welche Theile der Begrenzungsfläche des Raumes R sind, und durch welche die Begrenzungslinie des Minimalflächenstückes M^* mit der Begrenzungslinie des Minimalflächenstückes M in Verbindung gebracht wird. Hierbei hat der zu dem Minimalflächenstücke M^* gehörende Werth ε^* des Parameters ε dasselbe Vorzeichen, wie der reelle Theil der complexen Grösse $\frac{1}{\mathfrak{F}(s)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \right)^2$ längs der Begrenzung des Bereiches T .

Da die mittlere Krümmung der die Flächenstreifen Γ^* bildenden Flächenstücke einen von Null verschiedenen Werth hat, so ist es möglich, durch solche Variationen dieser Flächenstücke, welche die Begrenzung derselben unverändert lassen, den Flächeninhalt derselben zu verkleinern. In dem betrachteten Falle gibt es also unendlich viele, zusammenhängende, dem Minimalflächenstücke M unendlich benachbarte, von derselben Randlinie begrenzte Flächenstücke, welche kleineren Flächeninhalt besitzen als das Minimalflächenstück M .

Die beste Veranschaulichung der vorstehenden Betrachtungen gewährt der von Herrn LINDELÖF in seinem Lehrbuche der Variationsrechnung*) behandelte und durch Figuren erläuterte specielle Fall eines von zwei Parallelkreisen begrenzten zweifach zusammenhängenden Theiles eines Catenoids.

Dieser mit den Hilfsmitteln der Variationsrechnung zuerst von Herrn LINDELÖF untersuchte classische specielle Fall entspricht, wenn mit C eine reelle Constante bezeichnet wird, den Annahmen

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{1}{2s^2}, \quad G(s) = s(\log s + C).$$

Der Bereich T ist in diesem Falle ein zweifach zusammenhängendes von zwei concentrischen Kreisen begrenztes Ringgebiet; die Fläche Φ wird von

*) Leçons de calcul des variations, par L. LINDELÖF, Paris 1861, p. 204—214. Vergl. auch die Abhandlung: Sur les limites entre lesquelles le caténoïde est une surface minima. Par L. LINDELÖF. Acta Societatis Scientiarum Fennicae, tomus IX., Helsingfors 1871. (Mathematische Annalen, Band II, Seite 160.)

den Mantelflächen zweier Rotationskegel gebildet, deren Mittelpunkte und deren Axen zusammenfallen.

Es bietet keine Schwierigkeit, für passend gewählte Theile solcher Minimalflächen, welche von einer Schaar von Kegelflächen zweiten Grades eingehüllt werden *), eine analoge Untersuchung durchzuführen. An die Stelle der beiden Rotationskegel treten hierbei zwei Kegel zweiten Grades, welche eine gemeinschaftliche Hauptebene besitzen und von denselben beiden Schaa-
ren paralleler Ebenen in Kreisen geschnitten werden.

24.

Den Bedingungen des Grenzfalles entsprechende Minimalflächenstücke, für welche die Eigenschaft des Minimums uneingeschränkt bestehen bleibt.

Einem Minimalflächenstücke M , welches der im Art. 8 unter II. angegebenen Bedingung genügt, kann dessenungeachtet die Eigenschaft zukommen, kleineren Flächeninhalt zu besitzen, als alle anderen Flächenstücke, deren vollständige Begrenzung mit der Begrenzung dieses Minimalflächenstückes übereinstimmt.

Es wird hierbei als selbstverständlich betrachtet, dass mit dem Minimalflächenstücke M nur solche Flächenstücke verglichen werden, welche ohne Aufhebung des Zusammenhanges ihrer Theile und bei ungeändert gelassener Begrenzung durch continuirliche Variationen in das Minimalflächenstück M übergeführt werden können.

Beispiele solcher Minimalflächenstücke, welchen in dem angegebenen Sinne ein Minimum des Flächeninhalts zukommt, ergeben sich, wenn unter der Voraussetzung, dass λ eine positive constante Grösse bezeichnet, welche kleiner als 1 ist,

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{1}{2i s^2}, \quad G(s) = s(s^\lambda + s^{-\lambda})$$

gesetzt wird. **)

Durch diese Angaben wird für jeden Werth der Constante λ ein einfach zusammenhängendes Flächenstück, ein von zwei geraden Strecken und von zwei Schraubenlinien begrenzter Theil einer Schraubenfläche der Gestalt nach bestimmt, für welchen bei unverändert gelassener Begrenzung die zweite Va-

*) Vergl. den im 80:ten Bande des Journals für reine und angewandte Mathematik abgedruckten diese Flächen behandelnden Aufsatz des Verfassers.

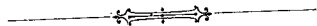
**) Vergl. die im Art. 6 angeführte Abhandlung des Verfassers, Monatsberichte der Berliner Akademie vom Jahre 1872; Seite 730.

riation des Flächeninhalts zwar den Werth Null, aber nicht negative Werthe annehmen kann.

Jeder der vier Theile, aus denen die Begrenzung eines solchen Minimalflächenstückes besteht, ist eine Asymptotenlinie desselben. Die Fläche Φ besteht aus zwei singulären Geraden und zwei abwickelbaren Schraubenflächen, deren Rückkehrkanten die der Begrenzung des Minimalflächenstückes angehörenden Schraubenlinien sind.

Die vorstehende Abhandlung hat während eines Ferienaufenthaltes des Verfassers in dem gastlichen Finnland die Form erhalten, in welcher dieselbe vorliegt.

Der finnländischen Gesellschaft der Wissenschaften spreche ich für die Auszeichnung, welche sie dieser Arbeit durch Aufnahme derselben in ihre Acta hat zu Theil werden lassen, den gebührenden Dank aus.



INHALTSVERZEICHNISS.

	Seite.
<i>Erster Theil.</i> Ueber Minimalflächenstücke, welche bei unverändert gelassener Begrenzungslinie ein Minimum des Flächeninhalts besitzen.	
Art. 1. Zwei unendlich benachbarte Minimalflächenstücke	319.
Art. 2. Betrachtung einer Schaar von Minimalflächenstücken. Herleitung des Fundamentalsatzes	320.
Art. 3. Einführung einer neuen Bedingung. Erweiterung des Geltungsbereiches des Fundamentalsatzes	322.
Art. 4. Andere Begründung des Fundamentalsatzes	323.
Art. 5. Analytischer Beweis des Fundamentalsatzes	324.
Art. 6. Anwendung des Fundamentalsatzes	328.
Art. 7. Geometrische Deutung einiger eine Schaar von Minimalflächenstücken betreffender Formeln	330.
Art. 8. Unterscheidung dreier Fälle. Tragweite der durch die Betrachtung derselben zu treffenden Entscheidung	333.
<i>Zweiter Theil.</i> Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u + p.u = 0$ unter vorgeschriebenen Bedingungen.	
Art. 9. Stellung der Aufgabe.	335.
Art. 10. Einige als bekannt vorauszusetzende Hilfssätze	336.
Art. 11. Voraussetzung der Existenz einer für den Bereich T den gestellten Bedingungen genügenden Function w , welche für keine Stelle dieses Bereiches den Werth Null annimmt. Folgerungen	337.
Art. 12. Weitere Folgerungen	339.
Art. 13. Einführung der Specialisirung $w_0 = 1$	340.
Art. 14. Erklärung der Grössen $W_{m,n}$, $V_{m,n}$, W_n	341.
Art. 15. Einführung der Constante c	344.
Art. 16. Einführung der Grösse Q	345.
Art. 17. Untersuchung der Convergenz der Reihe $w_0 + w_1 + w_2 + \dots$	346.
Art. 18. Untersuchung der Convergenz einiger unendlicher Producte	347.
Art. 19. Einführung der Functionen w_n und der Grössen \mathfrak{B}_m . Der Fall $c = 1$	348.
Art. 20. Die Constante $\frac{1}{c}$ als Minimum. Folgerungen	350.
Art. 21. Stetige Änderung des Werthes der Constante c bei stetiger Verkleinerung des Bereiches T	352.
Art. 22. Anwendung auf den Fall $p = \frac{8}{(1+x^2+y^2)^2}$	354.
<i>Schluss.</i> Einige den Grenzfall betreffende Bemerkungen.	
Art. 23. Den Bedingungen des Grenzfalles entsprechende Minimalflächenstücke, für welche die Eigenschaft des Minimums im gewöhnlichen Sinne zu bestehen aufhört. Verallgemeinerung des von Herrn LINDELÖF zuerst untersuchten speciellen Falles	357.
Art. 24. Den Bedingungen des Grenzfalles entsprechende Minimalflächenstücke, für welche die Eigenschaft des Minimums uneingeschränkt bestehen bleibt	360.

362
318
44