MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VII^e SÉRIE.
**Tome I, N° 9.**

# SUR QUELQUES INÉGALITÉS

CONCERNANT

## LES INTÉGRALES ORDINAIRES ET LES INTÉGRALES AUX DIFFÉRENCES FINIES.

Par

**V. Bouniakowsky,**
Membre de l'Académie.

*Lu le 29 avril 1859.*

St.-PÉTERSBOURG, 1859.

Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg
MM. Eggers et Comp.,

à Riga
M. Samuel Schmidt,

à Leipzig
M. Léopold Voss.

Prix: 25 Kop. = 8 Ngr.

Imprimé par ordre de l'Académie.

Juillet 1859. C. Vessélofski, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.

# SUR QUELQUES INÉGALITÉS

CONCERNANT

## LES INTÉGRALES ORDINAIRES ET LES INTÉGRALES AUX DIFFÉRENCES FINIES.

Par **V. Bouniakowsky.**

La considération des *moyennes arithmétiques* des fonctions d'une ou de plusieurs variables qui varient par degrès insensibles conduit au Calcul Intégral de la manière la plus naturelle, la plus élégante et la plus satisfaisante sous le rapport de la clarté. Dans un grand nombre d'applications de l'Analyse transcendante, ce point de vue facilite considérablement la conception des relations qui existent entre les diverses données de la question, comme on en peut citer beaucoup d'exemples, entr'autres dans la Théorie des Probabilités*).

Avant d'entrer en matière je rappellerai qu'en désignant par $f(x)$ une fonction continue pour toutes les valeurs de la variable $x$ depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, on aura

$$\underset{x_0}{\overset{X}{M}} f(x) = \frac{\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx}{X - x_0}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

la notation $\underset{x_0}{\overset{X}{M}} f(x)$ représentant *la moyenne arithmétique* de la fonction $f(x)$ relativement à toutes les valeurs de la variable continue $x$ comprises entre les limites $x = x_0$ inclusivement, et $x = X$ exclusivement. La relation (1) conduit ensuite, de la manière la plus simple, à toutes les propriétés générales des intégrales tant définies qu'indéfinies.

1. Au lieu de considérer les *moyennes arithmétiques* comme celles dont il a été question plus haut, et que nous appellerons pour abréger *continues*, on pourrait traiter directement d'autres moyennes, comme, par exemple, les *moyennes géométriques*, *harmoniques* etc.; on arriverait de cette façon à des relations qui subsistent entre celles-ci et la moyenne arithmétique. Ainsi, on pourra exprimer, au moyen des intégrales définies, une moyenne quelconque d'une fonction donnée qui varie d'une manière continue. Si,

*) Voyez à ce sujet mon *Traité du Calcul des Probabilités.* (Основанія Математической Теоріи Вѣроятностей, 1846 г.)

par exemple, il s'agissait de déterminer la *moyenne géométrique* de la fonction continue $f(x)$, la variable $x$ étant comprise entre les limites $x = x_0$ et $x = X$, on pourrait s'y prendre de la manière suivante, extrêmement simple. En observant que

$$\log.\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots . a_n} = \frac{\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \ldots + \log a_n}{n},$$

on conclut que *le logarithme de la moyenne géométrique est égale à la moyenne arithmétique des logarithmes.*

Si l'on admet actuellement que les nombres $a_1$, $a_2$, $a_3 \ldots . a_n$ représentent les valeurs successives de la fonction $f(x)$, $x$ variant d'une manière continue depuis $x_0$ jusqu'à $X$, et que toutes ces valeurs soient positives, la proposition qui vient d'être énoncée pourra se traduire par la formule

$$\textbf{(2)} \ldots\ldots\ldots\ldots \log.\underset{x_0}{\overset{X}{G}} f(x) = \underset{x_0}{\overset{X}{M}} \log f(x),$$

la notation $\underset{x_0}{\overset{X}{G}} f(x)$ désignant la *moyenne géométrique* de $f(x)$ pour toutes les valeurs de $x$ comprises entre $x_0$ et $X$. Par suite, en vertu de la formule (1), on a

$$\log.\underset{x_0}{\overset{X}{G}} f(x) = \frac{\int_{x_0}^{X} \log f(x)\,dx}{X - x_0},$$

d'où l'on tire définitivement

$$\textbf{(3)} \ldots\ldots\ldots\ldots \underset{x_0}{\overset{X}{G}} f(x) = e^{\frac{\int_{x_0}^{X} \log f(x)\,dx}{X - x_0}}.$$

Observons actuellement que comme la *moyenne arithmétique surpasse la moyenne géométrique*, il s'en suivra que

$$\frac{\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx}{X - x_0} > e^{\frac{\int_{x_0}^{X} \log f(x)\,dx}{X - x_0}},$$

ou bien

$$\textbf{(A)} \ldots\ldots\ldots \int_{x_0}^{X} \log f(x)\,dx < (X - x_0) \log\left(\frac{\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx}{X - x_0}\right).$$

Dans tout ce qui suivra nous supposerons toujours que la fonction que l'on considère est continue et positive entre les limites admises, et que $X > x_0$.

Avant de passer aux applications de l'inégalité (A), nous établirons quelques autres formules analogues. Commençons par la considération des *moyennes harmoniques.* Nous appellerons *moyenne harmonique* des nombres $a_1$, $a_2$, $a_3 \ldots . a_n$ l'expression

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)};$$

or, on sait que *cette moyenne est inférieure à la moyenne géométrique des nombres* $a_1, a_2, a_3 \ldots . a_n$, en sorte que l'on a

$$(a_1 a_2 a_3 \ldots . a_n)^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots .+\frac{1}{a_n}\right)}.$$

On vérifie de suite cette inégalité en lui donnant la forme

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots .+\frac{1}{a_n}}{n} > \left(\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdot \ldots . \frac{1}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

sous laquelle on retombe sur la relation bien connue entre la *moyenne arithmétique* et la *moyenne géométrique* des nombres $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2} \ldots . \frac{1}{a_n}$.

Si l'on suppose que $a_1, a_2, a_3 \ldots . a_n$ représentent les valeurs successives de la fonction continue $f(x)$ depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, on aura

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots .+\frac{1}{a_n}}{n} = \underset{x_0}{\overset{X}{M}} \frac{1}{f(x)} = \frac{\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{f(x)}}{X - x_0},$$

et comme de plus la valeur de la moyenne géométrique

$$(a_1 a_2 a_3 \ldots . a_n)^{\frac{1}{n}},$$

dans la même hypothèse, est égale à

$$e^{\frac{\int_{x_0}^{X} \log f(x)\, dx}{X - x_0}},$$

on aura la formule

$$\int_{x_0}^{X} \log f(x)\, dx > (X - x_0) \log\left(\frac{X - x_0}{\int_{x_0}^{X}\frac{dx}{f(x)}}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(B)}$$

Observons bien que les deux inégalités (A) et (B) donnent deux limites, l'une *supérieure*, l'autre *inférieure*, de l'intégrale $\int_{x_0}^{X} \log f(x)\, dx$, exprimées au moyen de $\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx$ et $\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{f(x)}$. Plus bas, nous ferons usage de ces formules, auxquelles on pourrait aussi donner la forme suivante:

$$\int_{x_0}^{X} \mathrm{f}(x)\, dx < (X - x_0) \log\left(\frac{\int_{x_0}^{X} e^{\mathrm{f}(x)}\, dx}{X - x_0}\right),$$

$$\int_{x_0}^{X} \mathrm{f}(x)\, dx > (X - x_0) \log\left(\frac{X - x_0}{\int_{x_0}^{X} e^{-\mathrm{f}(x)}\, dx}\right),$$

en faisant $\mathrm{f}(x) = \log f(x)$.

*

Prenons encore la relation bien connue

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\ldots\ldots+b_n^2)>$$
$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots\ldots+a_nb_n)^2.$$

Si l'on suppose que les nombres $a_1$, $a_2$, $a_3 \ldots . a_n$ soient les valeurs successives de la fonction continue $\varphi(x)$ depuis $x=x_0$, jusqu'à $x=X$, et que $b_1$, $b_2$, $b_3 \ldots . b_n$ représentent la suite des valeurs d'une autre fonction continue $\psi(x)$ entre les mêmes limites, l'inégalité précédente se trouvera remplacée par la suivante:

$$\textbf{(C)} \ldots\ldots\ldots\ldots \int_{x_0}^{X}\varphi(x)^2 . dx . \int_{x_0}^{X}\psi(x)^2 . dx > \left(\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,\psi(x)\,dx\right)^2,$$

De cette formule, qui se réduit à l'égalité pour $\psi(x)=\lambda\varphi(x)$, $\lambda$ étant une constante, on pourra déduire d'autres inégalités particulières. Ainsi, en supposant

$$\varphi(x)=\frac{1}{\psi(x)}=\sqrt{f(x)},$$

on obtient

$$\textbf{(D)} \ldots\ldots\ldots\ldots \int_{x_0}^{X}f(x)\,dx . \int_{x_0}^{X}\frac{dx}{f(x)} > (X-x_0)^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\overset{X}{\underset{x_0}{M}}f(x) . \overset{X}{\underset{x_0}{M}}\frac{1}{f(x)} > 1.$$

En faisant dans (C) $\psi(x)=1$, on a cette autre formule

$$\textbf{(E)} \ldots\ldots\ldots\ldots \left(\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx\right)^2 < (X-x_0)\int_{x_0}^{X}\varphi(x)^2 . dx.$$

Il est d'ailleurs visible que toutes les inégalités que nous venons d'établir se transforment en *égalités* pour $X=x_0$, et qu'en général les deux membres diffèrent d'autant moins entr'eux, que la différence $X-x_0$ des limites est plus petite par rapport à chacune d'elles.

Les formules que nous venons de donner, et beaucoup d'autres qu'on obtiendrait par les mêmes principes, peuvent donner lieu à quelques applications intéressantes. Nous allons en donner quelques exemples.

2. Et d'abord des formules (A) et (B) on déduit très facilement la relation qui lie la fonction variée avec sa première dérivée. En effet, si l'on pose

$$\log f(x)=F'(x),$$

on aura

$$\int_{x_0}^{X} \log f(x)\,dx = F(X) - F(x_0)$$

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} e^{F'(x)}\,dx = (X - x_0) \underset{x_0}{\overset{X}{M}} e^{F'(x)} = (X - x_0)\, e^{F'[x_0 + \lambda(X - x_0)]}$$

$$\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{f(x)} = \int_{x_0}^{X} e^{-F'(x)}\,dx = (X - x_0) \underset{x_0}{\overset{X}{M}} e^{-F'(x)} = (X - x_0)\, e^{-F'[x_0 + \lambda'(X - x_0)]},$$

les facteurs numériques $\lambda$ et $\lambda'$ étant tous deux compris entre 0 et 1, et correspondant respectivement aux *moyennes arithmétiques* des fonctions $e^{F'(x)}$ et $e^{-F'(x)}$. Dans cette hypothèse les formules (A) et (B) donnent

$$F(X) - F(x_0) < (X - x_0)\, F'[x_0 + \lambda(X - x_0)]$$

$$F(X) - F(x_0) > (X - x_0)\, F'[x_0 + \lambda'(X - x_0)].$$

Donc, puisque la fonction $F'(x)$ est supposée continue entre les limites $x_0$ et $X$, il se trouvera nécessairement un nombre $\theta$, compris entre $\lambda$ et $\lambda'$ tel, que l'on aura

$$F(X) = F(x_0) + (X - x_0)\, F'[x_0 + \theta(X - x_0)] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(4)}$$

Cette manière de parvenir à la relation (4) présente l'avantage de préciser, sous un certain point de vue, la fraction $\theta$ qui, comme nous venons de le voir, sera toujours comprise entre $\lambda$ et $\lambda'$, dont le sens est parfaitement défini *).

Pour donner une application numérique de la formule (4), soit

$$F'(x) = \log f(x) = \log(x^2) = 2 \log x;$$

nous trouverons d'abord

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \frac{X^3 - x_0^3}{3} = (X - x_0)\, e^{2 \log [x_0 + \lambda(X - x_0)]},$$

d'où, pour déterminer $\lambda$, on aura l'équation

$$[x_0 + \lambda(X - x_0)]^2 = \frac{X^2 + Xx_0 + x_0^2}{3}.$$

---

*) On peut observer que dans la formule (4) le nombre $\theta$ est précisément celui qui correspond à la *moyenne arithmétique continue* de la fonction $F'(x)$ entre les limites $x_0$ et $X$, c. à d. que l'on a

$$F'[x_0 + \theta(X - x_0)] = \underset{x_0}{\overset{X}{M}} F'(x).$$

Cette assertion devient évidente en faisant attention que

$$F(X) - F(x_0) = \int_{x_0}^{X} F'(x)\,dx = (X - x_0) \underset{x_0}{\overset{X}{M}} F'(x) = (X - x_0)\, F'[x_0 + \theta(X - x_0)].$$

De la même manière on arrivera à l'égalité

$$\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{f(x)} = \frac{X - x_0}{X x_0} = (X - x_0)\, e^{-2\log[x_0 + \lambda'(X - x_0)]},$$

qui donne

$$[x_0 + \lambda'(X - x_0)]^2 = X x_0.$$

De ces deux formules on tire de suite

$$\lambda = \frac{\sqrt{\frac{X^2 + X x_0 + x_0^2}{3}} - x_0}{X - x_0}$$

$$\lambda' = \frac{\sqrt{X x_0} - x_0}{X - x_0}.$$

Quant à la fonction $F(x)$, on a

$$F(x) = \int \log(x^2)\, dx = 2x(\log x - 1),$$

de sorte que l'équation (4) devient

$$2X(\log X - 1) = 2x_0(\log x_0 - 1) + 2(X - x_0)\log[x_0 + \theta(X - x_0)],$$

ou bien

$$\log X = \frac{x_0}{X}\log x_0 + \frac{X - x_0}{X} + \frac{X - x_0}{X}\log[x_0 + \theta(X - x_0)],$$

$\theta$ étant compris entre les deux limites $\lambda$ et $\lambda'$, trouvées ci-dessus.

Si l'on avait, par exemple, $x_0 = 1$, $X = 10$, on trouverait

$$\lambda = \frac{\sqrt{37} - 1}{9} = 0{,}5647\ldots., \quad \lambda' = \frac{\sqrt{10} - 1}{9} = 0{,}2402\ldots..$$

et

$$\log 10 = \tfrac{9}{10} + \tfrac{9}{10}\log(1 + 9\theta).$$

Le nombre $\theta$, d'après ce que nous venons de voir, doit satisfaire aux conditions

$$\theta < 0{,}5647\ldots., \quad \theta > 0{,}2402\ldots.$$

Or, l'interpolation fournit

$$\theta = 0{,}4168\ldots.,$$

nombre qui, en effet, se trouve compris entre $\lambda = 0{,}5647\ldots.$ et $\lambda' = 0{,}2402\ldots.$

Soit encore la fonction transcendante

$$F(x) = \int \log \sin x \,.\, dx;$$

on aura

$$\int_{x_0}^{X} \sin x\, dx = \cos x_0 - \cos X = (X - x_0) \underset{x_0}{\overset{X}{M}} \sin x = (X - x_0) \sin [x_0 + \lambda (X - x_0)]$$

$$\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{\sin x} = \log \left(\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} X}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} x_0}\right) = (X - x_0) \underset{x_0}{\overset{X}{M}} \frac{1}{\sin x} = (X - x_0) \cdot \frac{1}{\sin [x_0 + \lambda' (X - x_0)]}$$

$$F'(x) = \log \sin x.$$

Des deux premières équations on tire

$$\lambda = \frac{\arcsin \left(\frac{\cos x_0 - \cos X}{X - x_0}\right) - x_0}{X - x_0}$$

$$\lambda' = \frac{\arcsin \left(\frac{X - x_0}{\log \left(\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} X}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} x_0}\right)}\right) - x_0}{X - x_0}.$$

Par conséquent

$$F(X) = F(x_0) + (X - x_0) \log \sin [x_0 + \theta (X - x_0)],$$

le nombre $\theta$ étant compris entre les limites $\lambda$ et $\lambda'$ qui viennent d'être déterminées.

3. Établissons actuellement quelques inégalités curieuses qui subsistent entre des fonctions transcendantes.

Si l'on suppose dans la formule (A) $f(x) = e^x$, on obtient

$$\frac{e^X - e^{x_0}}{X - x_0} > e^{\frac{X + x_0}{2}},$$

ou bien, en représentant par $\lambda$ la quantité positive $\frac{X + x_0}{2}$,

$$e^\lambda - e^{-\lambda} > 2\lambda,$$

inégalité que l'on vérifie directement en développant en séries les deux exponentielles.

Supposons encore, dans la même formule (A), $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$; on obtiendra

$$\int_{x_0}^{X} e^{\frac{1}{x}} dx > (X - x_0) \left(\frac{X}{x_0}\right)^{\frac{1}{X - x_0}};$$

on aura donc ainsi la *limite inférieure* de la transcendante $\int_{x_0}^{X} e^{\frac{1}{x}} dx$. Si, en particulier, l'on prend $x_0 = 1$, $X = 2$, il viendra

$$\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} dx > 2.$$

On obtiendra de la même manière la *limite inférieure* de la transcendante $\int_{x_0}^{X} x^x\,dx$; en faisant $f(x) = x^x$, on a

$$\int_{x_0}^{X} x^x\,dx > (X - x_0. \frac{X^{\frac{X^2}{2(X-x_0)}}}{x_0^{\frac{x_0^2}{2(X-x_0)}}}.e^{-\frac{X+x_0}{4}}.$$

Pour $x_0 = 1$, $X = \frac{3}{2}$, on trouve

$$\int_{1}^{\frac{3}{2}} x^x\,dx > \frac{1}{2}.\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{9}{4}}.e^{-\frac{5}{8}} = 0{,}6665\ldots.,$$

valeur qui s'écarte peu de celle qu'on obtient pour cette intégrale par les méthodes ordinaires, et qui est

$$\int_{1}^{\frac{3}{2}} x^x\,dx = 0{,}6766\ldots..$$

Passons maintenant à quelques applications de la formule (B). En posant $f(x) = x$, on a

$$X(\log X - 1) - x_0(\log x_0 - 1) > (X - x_0)\log\left(\frac{X - x_0}{\log\left(\frac{X}{x_0}\right)}\right).$$

Supposons, comme plus haut, $x_0 = 1$, $X = 2$; nous aurons après quelques réductions très simples

$$\log(\log 16) > 1,$$

ce qui en effet est exact, car $\log 16 = 2{,}7725\ldots.$, nombre qui surpasse la base des logarithmes népériens $e = 2{,}7182\ldots..$

Faisons encore $f(x) = e^{-\frac{1}{n}}$; il viendra

$$\int_{x_0}^{X} e^{-\frac{1}{n}}dx > (X - x_0)\left(\frac{X}{x_0}\right)^{-\frac{1}{X-x_0}}.$$

Si l'on fait, par exemple, $x_0 = 1$, $X = 3$, on aura

$$\int_{1}^{3} e^{-\frac{1}{n}}dx > \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Venons maintenant aux applications des formules (C) et (D). Si, dans la première d'entr'elles, on suppose

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} \text{ et } \psi(x) = e^x,$$

on obtient

$$\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{X}\right)\left(\frac{e^{2X} - e^{2x_0}}{2}\right) > \left(\int_{x_0}^{X} \frac{e^x\,dx}{x}\right)^2;$$

de là on trouve pour la *limite supérieure* de la transcendante $\int_{x_0}^{X} \frac{e^x dx}{x}$

$$\int_{x_0}^{X} \frac{e^x dx}{x} < \sqrt{\frac{(X-x_0)(e^{2X}-e^{2x_0})}{2Xx_0}}.$$

Ainsi, pour $x_0 = 1$, $X = 2$, l'on aura

$$\int_{1}^{2} \frac{e^x dx}{x} < \frac{e}{2}\sqrt{e^2-1} = 3{,}4351\ldots.$$

En faisant $f(x) = \log x$ dans la formule (D), on obtient une *limite inférieure* de la transcendante $\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{\log x}$, connue sous la dénomination de fonction *logologarithmique* ou *hyperlogarithmique*, et qu'on déduit immédiatement de l'intégrale $\int \frac{e^x dx}{x}$ en remplaçant la variable $x$ par son logarithme. On aura

$$\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{\log x} > \frac{(X-x_0)^2}{X\log X - x_0 \log x_0 - (X-x_0)}.$$

Ainsi, en particulier, pour $x_0 = 2$, $X = 4$, on obtient

$$\int_{2}^{4} \frac{dx}{\log x} > \frac{4}{3\log 4 - 2} = 1{,}853\ldots.$$

Si l'on calcule cette intégrale au moyen des séries, on la trouve un peu supérieure à 2.

La supposition de $f(x) = \frac{1}{x}$ et $X = \lambda x_0$, dans la même formule (D), conduit à l'inégalité

$$\log\lambda > \frac{2(\lambda-1)}{\lambda+1}.$$

Quand $\lambda$ différera peu de l'unité, $\log\lambda$ sera sensiblement égal à $\frac{2(\lambda-1)}{\lambda+1}$. Posons $\lambda = 1 + \frac{1}{\mu}$, $\mu$ étant très grand; on aura à fort-peu-près

$$\log(\mu+1) = \log\mu + \frac{2}{2\mu+1}.$$

Ainsi, pour $\mu = 100$, on obtient par cette formule

$$\log(101) = \log(100) + \frac{2}{201} = 4{,}61512043,$$

tandis que la vraie valeur de $\log(101)$ est 4,61512052.

Faisons encore $f(x) = e^x$; nous aurons

$$(e^X - e^{x_0})(e^{-x_0} - e^{-X}) > (X - x_0)^2,$$

ou bien

$$\frac{(e^X - e^{x_0})^2}{e^{X+x_0}} > (X - x_0)^2,$$

d'où l'on tire l'inégalité

$$\frac{e^X - e^{x_0}}{X - x_0} > e^{\frac{X + x_0}{2}},$$

trouvée plus haut en faisant usage de la formule (A). Si l'on pose $x_0 = \log a$, $X = \log b$, on obtient

$$\log b - \log a < \frac{b - a}{\sqrt{ab}}.$$

En faisant $a = 1$, on a

$$\log b < \sqrt{b} - \frac{1}{\sqrt{b}},$$

ce qui se réduit à

$$\log k < \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right),$$

en faisant $k^2 = b$. Pour $k$ très peu différent de 1, on aura, à très-peu-près,

$$\log k = \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right).$$

L'inégalité

$$\frac{e^X - e^{x_0}}{X - x_0} > e^{\frac{X + x_0}{2}}$$

donne aussi, en posant $x_0 = 0$, $X = 1$,

$$e > 1 + \sqrt{e}.$$

Voici quelques exemples pour les fonctions circulaires.

Si l'on fait dans (D) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = 0$, $X = \frac{\pi}{6}$, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x . dx . \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 x} > \frac{\pi^2}{36},$$

et, en effectuant les intégrations,

$$9 + 2\sqrt{3} . \pi > 2\pi^2.$$

Posons encore, toujours dans la formule (D), $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x_0 = 0$, $X = \frac{1}{\sqrt{2}}$; on trouvera

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 - x^2} . dx . \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} > \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

c'est-à-dire

$$\pi^2 + 2\pi > 16, \text{ ou bien } \pi > -1 + \sqrt{17} = 3,123\ldots,$$

ce qui est exact, car la vraie valeur de $\pi$ est égale à 3,141....

La supposition $f(x) = \sin x . \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $X = \frac{\pi}{4}$, conduit à l'inégalité

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x . \cos x . dx . \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin x . \cos x} > \left(\frac{1}{12}\pi\right)^2$$

qui, après les intégrations, se réduit à

$$9\sqrt{3} > \pi^2.$$

Or, comme l'on a $9\sqrt{3} = 9{,}8874\ldots.$, et $\pi^2 = 9{,}8696\ldots.$, la différence de ces nombres sera au-dessous de 0,018.

Nous pourrions varier ces exemples à l'infini; bornons nous à donner encore une application des deux formules (A) et (B) qui, simultanément, fournissent deux limites, l'une *supérieure*, l'autre *inférieure*, de l'intégrale $\int_{x_0}^{X} \log f(x)\, dx$.

Supposons $f(x) = \operatorname{tang} x$; on aura pour les deux limites de la transcendante $\int_{x_0}^{X} \log \operatorname{tang} x . dx$ les expressions suivantes:

$$\int_{x_0}^{X} \log \operatorname{tang} x . dx < (X - x_0) \log \left\{ \frac{\log\left(\frac{\cos x_0}{\cos X}\right)}{X - x_0} \right\}$$

$$\int_{x_0}^{X} \log \operatorname{tang} x . dx > (X - x_0) \log \left\{ \frac{X - x_0}{\log\left(\frac{\sin X}{\sin x_0}\right)} \right\}$$

Si l'on suppose, par exemple, $x_0 = \frac{\pi}{4}$ et $X = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{12}\pi$, on trouvera

$$\sin x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\sin X = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \quad \cos X = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}};$$

par conséquent

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{12}\pi} \log \operatorname{tang} x . dx < \frac{\pi}{6}\left[\log\left(6 \log(\sqrt{3}+1)\right) - \log \pi\right]$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{12}\pi} \log \operatorname{tang} x . dx > \frac{\pi}{6}\left[\log \pi - \text{og}\left(6 \log(\sqrt{3}+1) - \log 2\right)\right].$$

En effectuant les calculs numériques indiqués dans ces deux expressions, on aura deux limites assez rapprochées de la transcendante en question, nommément

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{12}\pi} \log \operatorname{tang} x . dx \begin{matrix} < 0{,}3413\ldots. \\ > 0{,}2706\ldots. \end{matrix}$$

*

4. Faisons voir encore comment la formule (3) peut conduire à un caractère assez simple pour juger de la convergence d'une série. Avant tout, observons que si l'on a deux séries infinies

**(5)**. . . . . . . . . . . . . . . . . $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_x + \ldots$ et

**(6)**. . . . . . . . . . . . . . . . . $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_x + \ldots$

telles, que les termes $v_1, v_2, v_3 \ldots$ de la seconde soient compris entre ceux de la première, c. à d. que l'on ait

$$u_1 > v_1 > u_2 > v_2 > u_3 > v_3 > \ldots,$$

les séries (5) et (6) seront, visiblement, en même temps, ou toutes deux *convergentes*, ou toutes deux *divergentes*.

Prenons pour la série (6) la série bien connue

**(7)**. . . . . . . . . . . . . . . . $1 + \frac{1}{2^\rho} + \frac{1}{3^\rho} + \frac{1}{4^\rho} + \ldots + \frac{1}{x^\rho} + \ldots$

convergente pour $\rho > 1$, et divergente pour $\rho \overline{\gtrless} 1$, et formons la série (5) de manière à ce que ses termes consécutifs soient les *moyennes géométriques continues* que l'on obtient pour chaque couple

$$1 \text{ et } \frac{1}{2^\rho}, \quad \frac{1}{2^\rho} \text{ et } \frac{1}{3^\rho}, \quad \frac{1}{3^\rho} \text{ et } \frac{1}{4^\rho}, \ldots$$

des termes de la série (7). En vertu de la formule (3) on aura, pour déterminer le terme général $u_x$, l'équation suivante

$$e^{\int_{x-1}^{x} \log u_x . dx} = \frac{1}{x^\rho},$$

d'où l'on tirera

$$-\rho \log x = \int_{x-1}^{x} \log u_x . dx = \int_a^x \log u_x . dx - \int_a^{x-1} \log u_x . dx,$$

$a$ étant un nombre entier quelconque. En différentiant, l'on trouve

$$-\frac{\rho}{x} = \log u_x - \log u_{x-1} = \log \frac{u_x}{u_{x-1}},$$

et enfin

$$u_x = u_{x-1} . e^{-\frac{\rho}{x}},$$

$$u_{x-1} = u_{x-2} . e^{-\frac{\rho}{x-1}}$$

$$u_{x-2} = u_{x-3} . e^{-\frac{\rho}{x-2}}$$

. . . . . . . . . . . . . . .

$$u_3 = u_2 . ^{-\frac{\rho}{3}}$$

$$u_2 = u_1 . ^{-\frac{\rho}{2}}$$

Le produit de toutes ces équations donne

$$u_x = u_1 \cdot e^{-\varphi(x)\rho}, \dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{(8)}$$

$\varphi(x)$ représentant, pour abréger, la somme

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{x} = \varphi(x). \dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{(9)}$$

Remarquons, en passant, que la formule (8) conduit à l'inégalité bien connue

$$\log x > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{x}.$$

En effet, supposons $u_1 = 1$; la série des moyennes géométriques (5), en vertu de la formule (8), deviendra

$$1 + \frac{1}{e^{\varphi(2)\rho}} + \frac{1}{e^{\varphi(3)\rho}} + \dots + \frac{1}{e^{\varphi(x)\rho}} + \dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{(10)}$$

et l'on aura

$$\frac{1}{e^{\varphi(x)\rho}} > \frac{1}{x^\rho},$$

d'où

$$\log x > \varphi(x),$$

comme nous venons de le dire. Rappelons à cette occasion que, pour de très grandes valeurs de $x$, l'on a

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{x} = \log x + 0,577215\dots,$$

ou bien

$$\log x = \varphi(x) + 0,422785\dots$$

Revenons maintenant à la règle sur la convergence des séries que nous nous sommes proposé d'établir. La série (10) est convergente pour toute valeur de $\rho$ supérieure à 1, et divergente pour $\rho \overline{\gtrless} 1$. Soit une nouvelle série

$$V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_{x-1} + V_x + \dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{(11)}$$

On sait que si, pour des valeurs croissantes de $x$, le rapport $\frac{V_x}{V_{x-1}}$ reste constamment au-dessous du rapport analogue $\frac{u_{x-1}}{u_x}$ d'une série *convergente*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{x-1} + u_x + \dots,$$

la série (11) sera également *convergente*. Comparons donc le rapport $\frac{V_x}{V_{x-1}}$ au rapport

$$\frac{1}{e^{\varphi(x)\rho}} : \frac{1}{e^{\varphi(x-1)\rho}} = \frac{1}{e^{[\varphi(x)-\varphi(x-1)]\rho}};$$

pour que la série (11) soit convergente, il faudra que l'on ait

$$\frac{V_x}{V_{x-1}} < \frac{1}{e^{[\varphi(x)-\varphi(x-1)]\rho}},$$

$\rho$ étant supérieur à 1. Or, d'après la formule (9), on a

$$\varphi(x) - \varphi(x-1) = \frac{1}{x},$$

et par conséquent

$$e^{\frac{\rho}{x}} < \frac{v_{x-1}}{v_x},$$

d'où

$$\rho < x \log\left(\frac{v_{x-1}}{v_x}\right),$$

ou bien, en définitive,

**(12)**.................... $Lim.\left[x\log\left(\frac{v_{x-1}}{v_x}\right)\right] > 1.$

Telle est la condition pour que la série (11) soit ***convergente;*** elle sera, au contraire, ***divergente***, si l'on a

**(13)**.................... $Lim.\left[x\log\left(\frac{v_{x-1}}{v_x}\right)\right] < 1;$

le cas de

**(14)**.................... $Lim.\left[x\log\left(\frac{v_{x-1}}{v_x}\right)\right] = 1$

est douteux, et l'on devra alors avoir recours à d'autres règles pour décider de la convergence ou de la divergence de la série en question.

Si l'on applique la règle qui vient d'être trouvée aux deux séries

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2x-1)}{2.4.6\ldots 2x} + \ldots$$

$$1 + \frac{1}{2}.\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{7} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2x-1)}{2.4.6\ldots 2x}.\frac{1}{2x+1} + \ldots$$

on trouvera pour la première

$$Lim.\left[x\log\left(\frac{v_{x-1}}{v_x}\right)\right] = \frac{1}{2} < 1,$$

et pour la seconde

$$Lim.\left[x\log\left(\frac{v_{x-1}}{v_x}\right)\right] = \frac{3}{2} > 1,$$

d'où l'on conclura que la première est ***divergente***, et la seconde ***convergente***.

La règle de MM. Duhamel et Raabe, appliquée à ces mêmes séries, eût donné précisément les mêmes résultats. En effet, il est facile de voir que le caractère de convergence, exprimé par la condition (12), et celui de M. Duhamel, quand $\frac{v_{x-1}}{v_x}$ converge vers la limite 1, ne diffèrent entr'eux que par la forme. Pour cela il n'y a qu'à établir l'égalité

$$x\log\left(\frac{v_{x-1}}{v_x}\right) = x\left(\frac{v_{x-1}}{v_x} - 1\right)$$

pour $x=\infty$ et dans l'hypothèse de $Lim.\left(\frac{V_{x-1}}{V_x}\right)=1$. Si l'on suppose $\frac{V_{x-1}}{V_x}=k$, et qu'on se débarrasse dans l'équation précédente du facteur commun $x$, il suffira de démontrer que l'on a à la limite

$$\log k = k - 1.$$

Or, en écrivant cette équation sous la forme

$$k=\frac{e^k}{e},$$

et en développant l'exponentielle, on a

$$ek=e^k=1+k+\frac{k^2}{2}+\frac{k^3}{2.3}+\ldots.$$

On voit de suite que cette inégalité est satisfaite à la limite, c. à d. pour $k=1$.

Si l'on opérait sur la série (10) comme nous venons de le faire par rapport à la série (7), on obtiendrait un nouveau caractère pour juger de la convergence. Mais la nouvelle formule se présenterait sous une forme plus compliquée que la précédente, et contiendrait une intégrale définie.

Il sera très facile en suivant la marche qui vient d'être indiquée, et en employant les différentes formules établies dans cet article, de déduire d'autres règles, plus ou moins commodes, pour juger de la convergence d'une série.

On pourrait aussi, dans le même but, employer des *moyennes discontinues*. Ainsi, par exemple, si pour la série

$$1,\ \frac{1}{2^{\rho}},\ \frac{1}{3^{\rho}},\ \frac{1}{4^{\rho}}\ldots\ldots\ldots$$

on forme les *moyennes géométriques discontinues*

$$1,\ \frac{1}{2^{\frac{1}{2}\rho}},\ \frac{1}{(2.3)^{\frac{1}{2}\rho}},\ \frac{1}{(3.4)^{\frac{1}{2}\rho}}\ldots\ldots\ldots$$

cette nouvelle série sera *convergente* et *divergente* en même temps que la première, c'est-à-dire suivant que l'exposant $\rho$ sera plus grand que 1, ou, au contraire, inférieur ou égal à 1.

5. Toutes les formules (A), (B), (C), (D) et (E), relatives aux intégrales définies ordinaires, subsistent aussi pour les intégrales aux différences finies, en supposant également que les fonctions sous les signes d'intégration restent positives et finies pour toutes les valeurs attribuées à la variable. Supposons que cette variable reçoive successivement les $x$ valeurs équidifférentes

$$x_0,\ x_0+1,\ x_0+2,\ldots x_0+x-1=X,$$

en admettant que $x_0$ ne soit pas inférieur à 1; faisons

$$\mathop{S}_{x_0}^{X} f(x)=f(x_0)+f(x_0+1)+f(x_0+2)+\ldots+f(X),\ldots\ldots\ldots \mathbf{(15)}$$

le nombre des termes du second membre étant visiblement égal à $x$. Les formules (A), (B), (C) etc. du n° 1 se trouveront remplacées par

$$\text{(A}'\text{)} \ldots\ldots\ldots \quad \mathop{S}_{x_0}^{X} \log f(x) < x \log\left(\frac{\mathop{S}_{x_0}^{X} f(x)}{x}\right)$$

$$\text{(B}'\text{)} \ldots\ldots\ldots \quad \mathop{S}_{x_0}^{X} \log f(x) > x \log\left(\frac{x}{\mathop{S}_{x_0}^{X} \frac{1}{f(x)}}\right)$$

$$\text{(C}'\text{)} \ldots\ldots\ldots \quad \mathop{S}_{x_0}^{X}[\varphi(x)^2] \cdot \mathop{S}_{x_0}^{X}[\psi(x)^2] > \left(\mathop{S}_{x_0}^{X}[\varphi(x)\psi(x)]\right)^2$$

$$\text{(D}'\text{)} \ldots\ldots\ldots \quad \mathop{S}_{x_0}^{X}[f(x)] \cdot \mathop{S}_{x_0}^{X}\left[\frac{1}{f(x)}\right] > x^2$$

$$\text{(E}'\text{)} \ldots\ldots\ldots \quad \left(\mathop{S}_{x_0}^{X} \varphi(x)\right)^2 < x \mathop{S}_{x_0}^{X}[\varphi(x)^2].$$

Si, en particulier, on avait $x_0 = 1$, et par conséquent $X = x$, la série (15) deviendrait

$$\mathop{S}_{1}^{X} f(x) = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots\ldots + f(x),$$

et il n'y aurait qu'à changer dans les formules (A′), (B′), (C′) etc. $x_0$ et $X$ respectivement en 1 et $x$.

6. Sans nous étendre sur les applications des inégalités (A′), (B′), (C′) etc., nous nous contenterons d'en donner deux exemples très simples. Prenons la formule (C′) et supposons

$$\varphi(x) = a^x, \quad \psi(x) = b^x,$$

$a$ et $b$ étant des nombres positifs quelconques. En prenant pour les limites des intégrales $x_0 = 1$ et $X = x$, nous aurons

$$\mathop{S}_{x_0}^{X}[\varphi(x)^2] = \mathop{S}_{1}^{x}(a^{2x}) = \frac{a^2(a^{2x}-1)}{a^2-1}$$

$$\mathop{S}_{x_0}^{X}[\psi(x)^2] = \mathop{S}_{1}^{x}(b^{2x}) = \frac{b^2(b^{2x}-1)}{b^2-1}$$

$$\mathop{S}_{x_0}^{X}[\varphi(x)\psi(x)] = \mathop{S}_{1}^{x}(a^x \cdot b^x) = \frac{ab[(ab)^x-1]}{ab-1}.$$

Donc

$$\frac{a^2(a^{2x}-1)}{a^2-1} \cdot \frac{b^2(b^{2x}-1)}{b^2-1} > \frac{a^2b^2[(ab)^x-1]^2}{(ab-1)^2},$$

ou bien

$$\textbf{(16)} \ldots\ldots\ldots \quad \frac{(a^{2x}-1)(b^{2x}-1)}{(a^2-1)(b^2-1)} > \frac{[(ab)^x-1]^2}{(ab-1)^2}.$$

Si l'on particularise cette formule en faisant $b = 1$, on trouve

$$\left(\frac{b^{2x}-1}{b^2-1}\right)_{b=1} = x,$$

et par conséquent

$$x \cdot \frac{a^{2x}-1}{a^2-1} > \frac{(a^x-1)^2}{(a-1)^2}.$$

Observons que quand $a$ est plus grand que 1, on pourra multiplier cette inégalité par le facteur positif

$$\frac{a^2-1}{(a^x-1)^2},$$

et l'on aura

$$x \cdot \frac{a^x+1}{a^x-1} > \frac{a+1}{a-1}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Dans le cas de $a < 1$, nous obtiendrons l'inégalité

$$x \cdot \frac{1+a^x}{1-a^x} > \frac{1+a}{1-a}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Proposons nous encore de trouver la limite supérieure et la limite inférieure de la transcendante

$$\overset{x}{\underset{x_0}{S}}[\log x] = \log x_0 + \log(x_0+1) + \log(x_0+2) + \ldots + \log(x_0+x-1)$$

au moyen des deux formules (A′) et (B′). A cet effet supposons $f(x) = x(x+1)$ pour que les deux intégrations $\overset{X}{\underset{x_0}{S}} f(x)$ et $\overset{X}{\underset{x_0}{S}} \frac{1}{f(x)}$ puissent s'effectuer. On aura

$$\begin{aligned}
\overset{X}{\underset{x_0}{S}} \log f(x) &= \overset{X}{\underset{x_0}{S}} \log[x(x+1)] = \log[x_0(x_0+1)] + \log[(x_0+1)(x_0+2)] \\
&\qquad + \log[(x_0+2)(x_0+3)] + \ldots + \log[X(X+1)] \\
&= \log x_0 + \log(x_0+1) + \log(x_0+2) + \ldots + \log X \\
&\quad + \log(x_0+1) + \log(x_0+2) + \ldots + \log X + \log(X+1) \\
&= \overset{X}{\underset{x_0}{S}} \log x + \overset{X}{\underset{x_0}{S}} \log x - \log x_0 + \log(X+1).
\end{aligned}$$

De là on conclura

$$\overset{X}{\underset{x_0}{S}} \log f(x) = 2\overset{X}{\underset{x_0}{S}} \log x + \log\left(\frac{X+1}{x_0}\right).$$

Si l'on observe maintenant que

$$\overset{X}{\underset{x_0}{S}} f(x) = \overset{X}{\underset{x_0}{S}} [x(x+1)] = \frac{X(X+1)(X+2) - (x_0-1)x_0(x_0+1)}{3},$$

$$\overset{X}{\underset{x_0}{S}} \frac{1}{f(x)} = \overset{X}{\underset{x_0}{S}} \frac{1}{x(x+1)} = \frac{X}{X+1} - \frac{x_0-1}{x_0},$$

les formules (A′) et (B′) conduiront aux inégalités suivantes pour la détermination des limites de $\underset{x_0}{\overset{X}{S}}\log x$ :

$$2\underset{x_0}{\overset{X}{S}}\log x + \log\left(\frac{X+1}{x_0}\right) < x\log\left[\frac{X(X+1)(X+2)-(x_0-1)x_0(x_0+1)}{3x}\right]$$

$$2\underset{x_0}{\overset{X}{S}}\log x + \log\left(\frac{X+1}{x_0}\right) > x\log\left[\frac{x}{\frac{X}{X+1}-\frac{x_0-1}{x_0}}\right],$$

d'où l'on obtient de suite

$$\textbf{(19)}\ldots\ldots \underset{x_0}{\overset{X}{S}}\log x < \frac{1}{2}x\log\left[\frac{X(X+1)(X+2)-(x_0-1)x_0(x_0+1)}{3x}\right] - \frac{1}{2}\log\left(\frac{X+1}{x_0}\right)$$

$$\textbf{(20)}\ldots\ldots \underset{x_0}{\overset{X}{S}}\log x > \frac{1}{2}x\log\left[\frac{x}{\frac{X}{X+1}-\frac{x_0-1}{x_0}}\right] - \frac{1}{2}\log\left(\frac{X+1}{x_0}\right).$$

Appliquons ces deux formules à la recherche des limites de la somme des logarithmes népériens

$$\underset{101}{\overset{120}{S}}\log x = \log(101)+\log(102)+\log(103)+\ldots\ldots+\log(120).$$

Il faudra supposer

$$x_0 = 101,\quad X = 120,\quad x = 20.$$

Les inégalités (19) et (20) donneront

$$\underset{101}{\overset{120}{S}}\log x < 10\log(12354) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{121}{101}\right) = 94{,}1270168\ldots.$$

$$\underset{101}{\overset{120}{S}}\log x > 10\log(121\,.\,101) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{121}{101}\right) = 94{,}0187757\ldots.$$

Ces deux limites, comme on le voit, sont assez rapprochées entr'elles. Un calcul direct, effectué au moyen des tables des logarithmes népériens, donne pour la valeur de la transcendante $\underset{101}{\overset{120}{S}}\log x$ le nombre 94,0730124.... La moyenne arithmétique des deux limites, égale à 94,0728...., se rapproche beaucoup, comme on le voit, de la vraie valeur de cette intégrale.

Les différents résultats que nous venons de déduire des formules, établies dans cet article, font présumer qu'elles pourront donner lieu encore à quelques autres applications intéressantes.